应用随机过程

主讲人：蒋达权
打字人：龚诚欣

• 随机过程：设 T 是指标集，$\forall t\in T$，X_t 是定义在概率空间(Ω,F,P)上取值于集合 S 的随机变量，则称随机变量族 $X=\{X_t:t\in T\}$是定义在(Ω,F,P)上以 S 为状态空间的随机过程(stochatic process)。若 $T=Z,Z^+$或其子集（R,R^+或其子集）时，称 X 是离散（连续）时间参数随机过程；若 S 是有限集或可列无穷集（连续流）时，称 X 是离散（连续）状态的。固定$\omega\in\Omega$，$X_t(\omega):T\to S$ 称为 X 的一条样本轨道。

1 马氏链

1.1 定义与例子

• S 是一个可数集，$\{X_n:n\geqslant 0\}$是取值于 S 的一列随机变量。若 $P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})$，则称$\{X_n:n\geqslant 0\}$是 S 上的一个离散时间参数的马尔科夫链。若存在$\{p_{ij}:i,j\in S\}$s.t.$\forall n$，$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{ij}$，则称$\{X_n\}$时齐，得到的矩阵 $P=(p_{ij})_{S\times S}$ 称为转移概率矩阵。以下均指时齐马氏链。

• 转移矩阵必定满足 $p_{ij}\geqslant 0$，$\Sigma_{j\in S}p_{ij}=1$。

• 马氏性等价于 $P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)=P(X_0=i_0)\prod_{k=1}^{n}p(i_{k-1},i_k)$。

• 称 $p_{ij}(n)$为从 i 到 j 的 n 步转移概率，规定 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，称矩阵 $P(n)=(p_{ij}(n))_{S\times S}$ 为马氏链的 n 步转移概率矩阵。$P(n)=P^n$。

1.2 不变分布

• 若$\pi=\{\pi_j:j\in S\}$满足$\pi_j\geqslant 0$，$\Sigma_{j\in S}\pi_j=1$，$\pi_j=\Sigma_{k\in S}\pi_k p_{kj}$，则称$\pi$为转移矩阵的一个不变分布；满足(1)称测度，满足(1)(2)称概率测度，满足(1)(3)称不变测度。由于 $P\mathbf{1}=\mathbf{1}$，从而 rank(I-P)$\leqslant$N-1，即不变测度一定存在。

• 若随机过程$\{X_n:n\geqslant 0\}$满足任意非负整数 n,k，$(X_0,\cdots,X_k)$与$(X_n,\cdots,X_{n+k})$同分布，则称$\{X_n:n\geqslant 0\}$为平稳过程。

• π是不变分布，$X_0\sim\pi$的充要条件是$\{X_n:n\geqslant 0\}$是平稳过程。

1.3 状态的分类

• 若 $P_i(\exists n\geqslant \mathbf{0}$ 使得 $X_n=j)>0$，则称 i 能到达 j，记为 $i\to j$。若 $i\to j$ 且 $j\to i$，则称 i 与 j 互通，记为 $i\leftrightarrow j$（蕴含 $i\leftrightarrow i$）。互通关系是 S 上的一个等价关系。

• 若 $A\subset S$ 满足$\forall i\in A$，$\Sigma_{j\in A}p_{ij}=1$，则称 A 为一个闭集（**允许元素进来，不允许元素出去**）。若单点集是闭集，则称为吸收态。

• 给定转移矩阵 P，若状态空间 S 有非空、闭的真子集，则称 S 是可约的，也称 P 是可约的；反之称为不可约的。状态空间 S 不可约当且仅当 S 只有一个互通类。那也是说，状态空间有非空闭的真子集$\Leftrightarrow$有多个互通类。

• $B\subset S$，首中时定义为$\tau_B(w):=\inf\{n\geqslant 0,X_n(w)\in B\}$，首入时定义为$\sigma_B(w):=\inf\{n\geqslant 1,X_n(w)\in B\}$。

• 当 $X_0=i\in A$ 时，$\tau_A=0$，所以 $P_i(\tau_A<\infty)=1$，$E_i\tau_A=0$；反之，$\tau_A=\sigma_A$，则 $P_i(\tau_A<\infty)=P_i(\sigma_A<\infty)=\sum_{j\in S}P(X_1=j,\sigma_A<\infty|X_0=i)=\sum_{j\in S}P(X_1=j|X_0=i)P(\sigma_A<\infty|X_1=j,X_0=i)=\sum_{j\in S}p_{ij}P_j(\tau_A<\infty)$，$E_i\tau_A=1+\sum_{j\in S}p_{ij}E_j\tau_A$。这是两组方程，$\{P_i(\sigma_A<\infty)\}$,$E_i\tau_A$ 是方程组

的最小解。

• 若 A 是闭集，称 $P_i(\tau_A<\infty)$为吸收概率。

1.4 常返性

• 若 $P_i(X_n=i,i.o.)=1$，则称状态 i 是一个常返态，否则称为暂态。

• 令$\sigma_i^{(1)}=\inf\{n\geqslant 1,X_n=i\}$，归纳定义$\sigma_i^{(k)}=\inf\{n\geqslant 1+\sigma_i^{(k-1)},X_n=i\}$，表示马氏链$\{X_n\}$第 k 次到访状态 i 的时间。

• $P_i(\sigma_i^{(k+1)}-\sigma_i^{(k)}=n|\sigma_i^{(k)}<\infty)=P_i(\sigma_i=n)$。

• 记$\rho_{ij}=P_i(\sigma_j<\infty)$，则 $P_i(\sigma_i^{(k)}<\infty)=\rho_{ii}^k$。

• $V_i=\Sigma_{n=1}1_{\{Xn=i\}}$，$V_i\geqslant k$ 当且仅当$\sigma_i^{(k)}<\infty$，$\{V_i=\infty\}=\{X_n=i,i.o.\}$，且 V_i 服从几何分布。$P_i(V_i<\infty)=1\Leftrightarrow E_iV_i<\infty\Leftrightarrow\rho_{ii}<1$；$P_i(V_i<\infty)=0\Leftrightarrow E_iV_i=\infty\Leftrightarrow\rho_{ii}=1$。

• 定义 $G_{ij}=\Sigma_{n=0}p_{ij}(n)$为格林函数，$E_iV_i=\Sigma_{n=1}p_{ii}(n)=G_{ii}-1$，于是有 1° $\rho_{ii}=1$，则 i 常返，$G_{ii}=\infty$；2° $\rho_{ii}<1$，则 i 非常返，且 $G_{ii}<\infty$。

• $G_{ij}\leqslant G_{jj}$。

• $i\leftrightarrow j$，则 i 常返当且仅当 j 常返。如果马氏链不可约，则所有状态或者都常返，或者都非常返，我们也说马氏链是常返的或非常返的。

• 设π是一个不变分布，j 是暂态，则$\pi_j=0$。

• 对于 Z^d 上的简单随机游动，$\rho_{00}=1-1/G_{00}$。一维和二维简单随机游动是常返的，三维或更高维的简单随机游动是非常返的。

• P 不可约，常返性等价于任意 $i,j\in S$，$P_i(\sigma_j<\infty)=1$。

1.5 极限行为

• 称$\{n\geqslant 1:p_{ii}^{(n)}>0\}$的最大公约数为状态 i 的周期。若 i 的周期是 1，则称状态 i 是非周期的。若 $i\leftrightarrow j$，则 i 与 j 具有相同的周期。

• 设 P 不可约，则存在正整数 d 以及 S 的一个分割 $D_0,\cdots,D_{d-1}$ 使得 1° $\forall r\geqslant 0,\forall i\in D_r,\forall l\geqslant 0$，$\Sigma_{j\in D_{r+l}}p_{ij}^{(l)}=1$；2° $\forall r\geqslant 0,\forall i,j\in D_r,\exists n_0\geqslant 0$ s.t.当 $n\geqslant n_0$ 时，$p_{ij}^{(nd)}>0$。d 就是 P 的周期。若非周期，则存在充分大的 n_0，s.t. $n\geqslant n_0$ 时，$p_{ij}^{(n)}>0(\forall i,j)$。

• 假设 P 不可约、非周期，若π是 P 的不变分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j\in S}|p_{ij}^{(n)}-\pi_j|=0,\forall i\in S$。

• 假设 P 不可约，不变分布π存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j\in S}|\frac{1}{n}\sum\limits_{m=0}^{n}p_{ij}^{(m)}-\pi_j|=0,\forall i\in S$。

• 假设 P 不可约，则 P 至多只有一个不变分布。

1.6 遍历定理与正常返

• 遍历定理：记 $V_j(n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}1_{\{X_k=j\}}$，设 P 不可约，则对任意 $j\in S$ 和任意初分布μ，$P_\mu(\lim_n V_j(n)/n=1/E_j\sigma_j)=1$。

• 若 $E_i\sigma_i<\infty$，则称状态 i 是正常返态；若 i 常返但 $E_i\sigma_i=\infty$，则称状态 i 是零常返态。设 P 不可约，则所有状态正常返$\Leftrightarrow$存在正常返态$\Leftrightarrow$不变分布存在；上述条件都满足，则不变分布π为$\pi_i=1/E_i\sigma_i$。

• 设 P 不可约、正常返，f 有界，则 $P(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}f(X_k)=\sum\limits_{i\in S}\pi_i f(i)=E_\pi f(X))=1$。

• 不可约、常返的转移矩阵 P 的不变测度在忽略常数倍的意义下唯一。

• 设 P 不可约、零常返，则对任意 $i,j\in S$，$\lim_n p_{ij}^{(n)}=0$。

• 不可约$\begin{cases} 常返\begin{cases} 正常返 \Leftrightarrow 有不变分布\begin{cases} 非周期: p_{ij}^{(n)} \to \pi_j \\ 周期: \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \pi_j \end{cases} \\ 零常返: p_{ij}^{(n)} \to 0 \end{cases} \\ 非常返: p_{ij}^{(n)} \to 0 \end{cases}$。

1.7 收敛速度

• M 是状态空间 S 上所有概率测度集合，不变分布是 P 的不动点，构成集合 I。M，I 都是凸集。

• 若 P 不可约，正常返，非周期，π是 P 的不变分布，则任意$\mu\in M$，$\mu P^n\to\pi$。若任意$\mu\in M$，都有$\mu P^n\to\pi$，则π是 P 的不变分布。（Fatou lemma）

• 若 S 有限，则 $n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu P^k$ 收敛到 P 的某个不变分布。

• 任意$\mu,\nu\in M$，定义 $d_{TV}(\mu,\nu)=1/2\ \Sigma_{i\in S}|\mu_i-\nu_i|=\sup_{A\subset S}|\mu(A)-\nu(A)|$。这是 M 上的一个距离。$d_{TV}(\mu_n,\mu)\to0$ 当且仅当$\mu_{n,i}\to\mu_i$ 对任意 $i\in S$ 成立。$d_{TV}(\mu P,\nu P)\leqslant d_{TV}(\mu,\nu)$。

• 假设 S 有限，转移矩阵 $P=(p_{ij})_{ij}$ 满足 $p_{ij}>0$，那么存在常数 $0\leqslant a<1$，使得任意$\mu,\nu\in M$，$d_{TV}(\mu P,\nu P)\leqslant a d_{TV}(\mu,\nu)$。特别的，若$\pi$是不变分布，则 $d_{TV}(\pi,\mu P^n)\leqslant a^n$。

• 假设 S 有限，P 不可约，非周期，π是 P 的不变分布，则存在常数 $a>0$，$b>0$，使得对任意$\mu\in M$，$d_{TV}(\mu P^n,\pi)\leqslant ae^{-bn}$。

1.8 可逆分布

• 设 $X=\{X_n:n\geqslant0\}$，固定 N，$Y=\{Y_k=X_{N-k},0\leqslant k\leqslant N\}$，则 Y 是马氏链，转移概率 $P(Y_{k+1}=j|Y_k=i)=\mu_j^{(N-k-1)}p_{ji}/\mu_i^{(N-k)}$，其中$\mu_i^{(m)}=P(X_m=i)$。若 $X_0\sim\pi$，π是不变分布，则 Y 时齐，转移概率$\pi_j p_{ji}/\pi_i$。

• 对于 $M\subset S$，若任意 $N\geqslant0$，$(X_N,\cdots,X_0)$与$(X_0,\cdots,X_N)$同分布，则称 X 是可逆的。可逆马尔科夫链一定时齐、平稳。

• π是 S 上的一个非平凡测度使得$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$(细微平衡条件)，则称$\pi$是 P 的配称测度。若$\pi$还是概率测度，则称$\pi$是 P 的可逆分布。配称测度是不变测度，可逆分布是不变分布。

• 设 X 以 P 为转移阵的时齐马氏链，则 X 可逆$\Leftrightarrow$X 的初分布是 P 的可逆分布。

• 有限状态不可约马氏链可逆，则转移阵所有特征值为实数。

• （Kolmogorov 可配称准则）不可约马氏链有配称测度的充要条件是下列环条件成立：任意状态环路 $i_1\to i_2\to\cdots\to i_m\to i_1$，$p_{i_1i_2}p_{i_2i_3}\cdots p_{i_mi_1}=p_{i_2i_1}p_{i_3i_2}\cdots p_{i_1i_m}$。此时取定 $i_0\in S$，令$\mu_{i_0}=1$，任意 $i\neq i_0\in S$，取 i_0 到 i 的一条通路，$i_0\to i_1\to\cdots\to i_m\to i_{m+1}=i$，令

$\mu_i=\prod_{k=0}^{m}\frac{p_{i_k}p_{i_{k+1}}}{p_{i_{k+1}}p_{i_k}}$，则$(\mu_i)_i$是 P 的配称测度。若可归一化，则是 P 的可逆分布。

• 加权图与可配称转移矩阵：G=(V,E)无向连通简单图，$E:(i,j)\to w_{ij}$。若 $w_i=\Sigma_j w_{ij}<\infty$，则定义 $p_{ij}=w_{ij}/w_i$，P 有配称测度。若$\Sigma_i w_i<\infty$，则 P 有可逆分布。反之，对任何可配称转移矩阵 P，配称测度μ，定义 $w_{ij}=\mu_i p_{ij}$，则(V,E)是加权图。

•加权图上的随机游动常返当且仅当对应的电网络从任何顶点到无穷远的总的有效电阻为无穷大，这里电阻定义为 $R_{ij}=1/w_{ij}$。

• G_1 是 G_2 的连通子图，若 G_2 上的简单随机游动常返，则 G_1 上 SRW 常返。

1.9 一维简单随机游动

• 设 m＞0，n+m 是偶数，则 $P_0(\tau_m=n)=\frac{m}{n}C_n^{\frac{n+m}{2}}\frac{1}{2^n}$。【反射原理】

• 推论：对 Z^1 上的 SRM，$P_0(\tau_1<+\infty)=1$，$E_0\tau_1=+\infty$。
• $S_0=0$，则τ_1和$\tau_2-\tau_1$独立同分布。

1.10 Wald 等式

• 赌徒破产模型：带吸收壁的随机游动，初始点 $S_0=m$，完胜点 M，破产点 0。完胜概率 m/M，破产概率 1-m/M。平均赢钱数量是 0。
• 取定 N≥1，令$\tau=\min(\tau_{-N},\tau_N)$，则任意 m∈[-N,N]，$E_m\tau<\infty$。从而利用重期望公式，知 $E_m\tau=m(M-m)$。
• 设 $X=\{X_n:n\geq 0\}$为取值于 S 的随机过程，τ取值于 $Z_+\cup\{\infty\}$的广义随机变量。若任意 n≥0，$1_{\{\tau\leq n\}}$可由 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 表出，即存在 $f:S^{n+1}\to\{0,1\}$使得 $1_{\{\tau\leq n\}}=f(X_0,\cdots,X_n)$，则称τ是 X 的停时。

1.11 分支过程

• 设$\{\xi_{ni}:n\geq 0,i\geq 1\}$i.i.d.非负整数值，$X_0=1$，$X_n=\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n-1,j}$，称$\{X_n:n\geq 0\}$为 G-W 分支过程。$\{X_n:n\geq 0\}$是时齐马氏链。设 $p_k=(\xi_{01}=k)$为分支过程子氏分布。$p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(\sum_{k=1}^{X_n}\xi_{n,k}=j|X_n=i)=P(\sum_{k=1}^{i}\xi_{n,k}=j)$。设$\xi_{01}$的母函数为 $f(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_k s^k$，$\sum_{k=1}^{i}\xi_{n,k}$ 的母函数为 $f^i(s)$，则 $P(\sum_{k=1}^{i}\xi_{n,k}=j)=\frac{1}{j!}\frac{d^j f^i(s)}{d^j s}|_{s=0}$。$p_{00}=1$，$p_{0j}=0$，令$\tau_0$为灭绝时刻，$\rho=P_1(\tau_0<\infty)$为灭绝概率，则 $P_i(\tau_0<\infty)=\rho^i$。
• $EX_n=m^n$，其中 $m=E\xi_{01}$ 为平均后代数；设 $p_1<1$，则ρ是方程 s=f(s)的最小非零解，ρ＜1 的充要条件是 m＞1。m＜1 称为次临界，m=1 称为临界，m＞1 上临界。

1.12 补充知识

• 强马氏性：设 $X=\{X_n:n\geq 0\}$时齐马氏链，转移阵 P，τ是 X 的停时，当τ＜∞时，定义 $Y_n=X_{\tau+n}$，则在τ＜∞，$X_\tau=i$ 的条件下，$\{Y_n:n\geq 0\}$是从 i 出发的时齐马氏链，且与$\{X_1,\cdots,X_n\}$独立，转移阵 P。特别地，若 P(τ＜∞)=1，则$\{Y_n\}$是以 P 为转移阵的 HMC。
• Wald 等式：设$\{X_n:n\geq 1\}$i.i.d.，$E|X_1|$有限，令 $S_0=0$，则 $S_n=X_1+\cdots+X_n$，若τ是$\{S_n\}$的停时，$E_0\tau$有限，则 $E_0S_\tau=E(X_1+\cdots+X_\tau)=EX_1E_0\tau$。

2 跳过程

2.1 泊松过程

• 随机过程$\{N_t:t\geq 0\}$，若 N_t 表示到时刻 t 为止某个特定事件发生次数，则称$\{N_t:t\geq 0\}$为计数过程。$N_t\in Z^+$，N_t 单调递增，N_t-N_s 表示(s,t]中事件发生次数。
• 若计数过程满足 $X=\{X_t:t\geq 0\}$满足：$X_0=0$；任意 $0\leq t_0<t_1<\cdots<t_n$，$X_{t0},X_{t1-t0},\cdots,X_{tn-tn-1}$ 相互独立；任意 s≥0，t＞0，$X_{s+t}-X_s\sim P(\lambda t)$。即 $P(X_{s+t}-X_s=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$，则

称 X 是强度参数为λ的泊松过程，记为 $X\sim PP(\lambda)$。

• $\{\xi_k:k\geqslant 1\}$顾客到达时间间隔，第 n 个顾客到达时刻 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，X_t 是[0,t]到达顾客数，$\{X_t\geqslant n\}=\{S_n\leqslant t\}$，$\{X_t=n\}=\{S_n\leqslant t<S_{n+1}\}$。设$\xi_n$i.i.d.，$\xi_1\sim Exp(\lambda)$，$X=\{X_t:t\geqslant 0\}\sim PP(\lambda)$。

• $\{X_t:t\geqslant 0\}\sim PP(\lambda)$，则$\{\xi_k:k\geqslant 1\}$i.i.d.，$\xi_1\sim Exp(\lambda)$。

• 计数过程$\{X_t:t\geqslant 0\}\sim PP(\lambda)$当且仅当$\{X_t:t\geqslant 0\}$满足 $X_0=0$，独立增量性，平稳增量性：$X_{t+s}-X_s$ 分布不依赖于 s，简单性：$P(X_{t+h}-X_t=1)=\lambda h+o(h)$，$P(X_{t+h}-X_t\geqslant 2)=o(h)$。

• 设 $U_1,\cdots,U_k\sim U[0,t]$，次序统计量为 $U_{(1)},\cdots,U_{(k)}$，则$(S_1,\cdots,S_k)|_{X_t=k}$ 与$(U_{(1)},\cdots,U_{(k)})$独立同分布，其中$\{X_t:t\geqslant 0\}\sim PP(\lambda)$。

• 设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$是随机过程，状态空间 S 可数，若任意 $0\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_n<s<s+t$，以及 $i_1,\cdots,i_m,i,j\in S$，$P(X_{s+t}=j|X_s=i,X_{sm}=i_m,\cdots,X_{s1}=i_1)=P(X_{s+t}=j|X_s=i)$，则称连续时间参数马氏链。若 $P(X_{s+t}=j|X_s=i)$不依赖于 s，则称时齐。定义 $p_{ij}(t)=P(X_{s+t}=j|X_s=i)$为 X 的转移概率，$P(t)=(p_{ij}(t))_{i,j\in S}$ 为 X 的转移概率矩阵。

• 性质：$p_{ij}(t)\geqslant 0$，$\Sigma_{j\in S}p_{ij}(t)=1$，Kolmogorov 方程：$P(s+t)=P(s)P(t)$。

• 泊松过程是时齐马氏链。

• 设 $X\sim PP(\lambda)$，$Y\sim PP(\mu)$，X 与 Y 独立，令 $Z=X+Y$，则 $Z\sim PP(\lambda+\mu)$。

• $X\sim PP(\lambda)$，$\{\xi_n\}$独立同分布$\sim B(1,p)$与 X 独立，$Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n$，$Z_t=\sum_{n=1}^{X_t}1-\xi_n$，则 $Y\sim PP(\lambda p)$，$Z\sim PP(\lambda(1-p))$且 Y 和 Z 独立。

• 复合泊松过程：设 $X\sim PP(\lambda)$，$\{\xi_n\}$独立同分布与 X 独立，$Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n$ 称为复合泊松过程。

2.2 生灭过程

• 设$\{\xi_n:n\geqslant 1\}$独立随机变量序列，$\xi_n\sim Exp(\lambda_n)$，令 $S_0=0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$X_t=\sup\{n:S_n\leqslant t\}$，则 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$取值于 $Z_+\cup\{\infty\}$的连续时间参数随机过程，称为纯生过程。

• $\tau:=\lim S_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\xi_k$。若$\tau<\infty$，称为 X 爆炸，$P(\tau<\infty)$称为爆炸概率。

• $\{\xi_n:n\geqslant 1\}$独立随机变量序列，$\xi_n\sim Exp(\lambda_{n-1})$。则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}</=\infty\Rightarrow P(\tau</=\infty)=1$。

• 线性纯生(Yule)过程：$\lambda_k=\lambda k$，设$\{X_t:t\geqslant 0\}$从 1 出发，则 $P_1(X_t=k)=(1-e^{-\lambda t})^{k-1}e^{-\lambda t}$。【归纳法证明 $P(S_k\leqslant t)=(1-e^{-\lambda t})^k$】

• 生灭过程：$\lambda_i=q_ip_i$ 出生率，$\mu_i=q_i(1-p_i)$死亡率，$\xi_i\sim Exp(q_i)$。相当于是有两个独立的服从指数分布 $Exp(\lambda_i)$和 $Exp(\mu_i)$的闹钟，谁先响就往哪跳一步。

2.3 跳过程

• 设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$可数集 S 为状态空间，连续时间参数时齐马氏链，转移矩阵族$\{P(t)=p_{ij}(t)\}$，X 分布由初分布与$\{P(t)\}$决定。

• 若转移矩阵族{$P(t)$}满足 $\lim_{t\to0}P(t)\to I$，则称 X 标准。【蕴含处处连续】
• 转移矩阵族{$P(t)$}标准，则任意 $i\in S$，$q_{ii}=\lim_{t\to0}(p_{ii}(t)-1)/t$ 存在，但可能为负无穷，记 $q_i=-q_{ii}\in[0,+\infty]$；任意 $i\neq j\in S$，$q_{ij}=\lim_{t\to0}p_{ij}(t)/t$ 存在且有限，而且 $0\leqslant q_{ij}\leqslant q_i\leqslant\infty$，$\Sigma_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i$；$p_{ii}(t)>0$，任意 $t\geqslant0$。此时 $Q=(q_{ij})_{ij}$ 称为 X 的转移速率矩阵。
• 若方阵 $Q=(q_{ij})_{ij}$ 满足 1° $q_{ii}=-q_i\leqslant0$，q_i 可为正无穷；2° 任意 $i\neq j$，$q_{ij}\in[0,+\infty)$；3° $\Sigma_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i$；则称 Q 是转移速率矩阵。
• 若$\Sigma_{j\neq i}q_{ij}=q_i<\infty$，则称 Q 保守。
• X 是有限状态连续时间参数马氏链，转移矩阵 $P(t)$标准，则 X 的转移速率矩阵 Q 保守，且 $P'(t)=P(t)Q=QP(t)$。（kolmogorov 前进/后退方程）从而 $P(t)=e^{Qt}$。
• 对保守马氏链，后退方程一定成立；若 $\sup\{q_i\}<\infty$，前进方程成立。
• 设连续参数时齐马氏链 $X=\{X_t:t\geqslant0\}$轨道右连续，$P(\lim_{t\to t0}X_t=X_{t0})=1$，对满足 $0\leqslant q_i<\infty$的状态 i，有 1° $P(\tau>t|X_0=i)=e^{-q_it}$，2° $P(\tau\leqslant t,X_\tau=j|X_0=i)=(1-e^{-q_it})\dfrac{q_{ij}}{q_i}$ ($q_i>0$，$j\neq i$)；3° $P(X_\tau=j|X_0=i)=q_{ij}/q_i$，$q_i>0$，$j\neq i$；Q 保守时，$\tau$与 X_τ条件独立。
• 轨道右连续，则 $P(t)$标准。
• $q_i=0$，则 $P(\tau=+\infty|X_0=i)=1$，称 i 为吸收态；$q_i=+\infty$，$P(\tau>0|X_0=i)=0$，称 i 为瞬时态；其余情况，称 i 为逗留态。
• 假设 HMC $X=\{X_t:t\geqslant0\}$轨道右连续，Q 保守，无吸收态，令τ_k为 X 第 k 次跳跃时刻，记 $Y_k=\{X_{\tau k}\}$，则 Y 是离散时间参数时齐马氏链，状态空间与 X 一致，转移矩阵 $P=(p_{ij})=(q_{ij}/q_i)(j\neq i)$，$0(j=i)$。称 Y 为 X 的嵌入链。
• 强马氏性：任意关于 X 的停时，若 A,B 是 X 在τ之后及τ之前决定的两时间，则 $P(A|X_\tau=i,B)=P(A|X_\tau=i)$。
• 从转移速率构造 CTMC：给定保守转移速率 Q，设 $q_i>0$，令 $p_{ij}=(q_{ij}/q_i)(j\neq i)$，$0(j=i)$。构造一个以 P 为转移矩阵的离散时间马氏链 $Y=\{Y_n:n\geqslant0\}$及与 Y 独立的相互独立同分布$\{\xi_n:n\geqslant1\}$，$\xi_1\sim Exp(1)$，$\eta_n=\xi_{n+1}/q_{Yn}$，则 $Y_n=i$ 时，$\eta_n\sim Exp(q_i)$，$S_n=\eta_0+\ldots+\eta_n$ 第 n 次跳跃时刻，令 $X_t=Y_n$，$t\in[S_n,S_{n+1})$，$\tau=\lim_n S_n$ 称为 X 的爆炸时。
• 若 $\sup_iq_i<\infty$，则非爆炸。
• $P(S_1>t|X_0=i)=e^{-q_it}$，$P(\tau\leqslant t,X_t=j|X_0=i)=(1-e^{-q_it})\dfrac{q_{ij}}{q_i}$ ($q_i>0$，$j\neq i$)；3° $P(X_\tau=j|X_0=i)=q_{ij}/q_i$，$q_i>0$，$j\neq i$。令 $p_{ij}(t)=P(X_t=j|X_0=i)$，$P(t)=(p_{ij}(t))$。$N_t=\sup\{n\geqslant0,S_n\leqslant t\}$表示 X 在[0,t]上跳跃次数。
• 任意 $s,t>0$，$i,j\in S$，$P_i(X_t=j|X_{t+s}=k)=P_i(X_t=j)P_j(X_s=k)$。
• 任意 $k\geqslant2$，$0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k,i_1,\cdots,i_k,i\in S$，则 $P(X_{t1}=i_1,\cdots X_{tk}=i_k|X_0=i)=p_{ii_1}(t_1)\cdots p_{i_{k-1}i_k}(t_k-t_{k-1})$。即 X 是连续时间参数时齐马氏链。
• $P(t)$满足：$P(0)=I$，$P(s+t)=P(s)P(t)$，$\lim_{t\to0}P(t)=I$，$P'(0+)=Q$。
• 连续时间分支过程：设 t=0 时有同类型粒子 X_0 个，每个粒子分裂时间$\sim Exp(\lambda)$，各粒子分裂行为相互独立，分裂后代个数相同概率分布，分裂为 k 个的概率 f_k，记 X_t 为 t 时刻粒子总数。P([t,t+h])内有两个以上粒子分裂的概率是 o(h)，P(一个粒子在[t,t+h]内分裂两次以上的概率)=o(h)，$P_{ii}(h)=1-i\lambda h(1-f_1)+o(h)$。任意 $j\geqslant i+1$，$P_{ij}(h)=C_i^1(1-e^{-\lambda h})(e^{-\lambda h})^{i-1}f_{j-i+1}+o(h)$。$q_{ij}=i\lambda f_{j-i+1}$，$q_{i,i-1}=i\lambda f_0$。

2.4 基本性质

• 设 $X=\{X_t:t\geqslant0\}$轨道有连续连续时间参数时齐马氏链，状态空间 S，转移速率

矩阵 Q 保守、非爆炸，嵌入链 $Y=\{Y_n:n\geqslant 0\}$，$\{S_n:n\geqslant 0\}$跳跃时刻。令$\tau_j=\inf\{t\geqslant 0:X_t=j\}$。给定$\delta>0$，$\{X_{n\delta}:n\geqslant 0\}$离散时间时齐马氏链，转移矩阵 $P(\delta)$，称为 X 的δ-骨架。

• 可达与互通：若 $P_i(\tau_j<\infty)>0$，则称 i 可达 j，记为 $i\to j$。若 $i\to j$ 且 $j\to i$，则称 i 与 j 互通，记为 $i\leftrightarrow j$。这是一个等价关系。若马氏链都互通，则称不可约。

• 当 $i\neq j$ 时，下列叙述等价：1° $i\to j$；2° 对嵌入链，$i\to j$；3° 存在 $i_0,i_1,\cdots,i_n$，使得 $i_0=i$，$i_n=j$，且 $q_{i_0i_1}>0,\cdots,q_{i_{n-1}i_n}>0$；4° 任意 $t>0$，$P_i(X_t=j)=p_{ij}(t)>0$；5° 存在 $t>0$，使得 $p_{ij}(t)>0$。

•下列叙述等价：1° $P_i(\forall t>0$，存在 $s>t$，s.t. $X_s=i)=1$；2° $q_i=0$ 或$\rho_{ii}=P_i(\sigma_i<\infty)=1$；3° $q_i=0$ 或 $P_i(\sigma_i^{(k)}<\infty)$；4° $G_{ii}=\int_0^\infty p_{ii}(t)dt=\infty$；5° i 是嵌入链常返态。若上述命题任一成立，则称 i 是常返态。

• $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt=\infty \Leftrightarrow \exists\delta>0$，$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n\delta)=+\infty \Leftrightarrow \forall\delta>0$，$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n\delta)=+\infty$。从而 i 常返当且仅当 i 是$\delta$骨架的常返态。

• 若 i 常返，$q_i>0$，则 $P_i(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=i\}}ds=\frac{1}{q_iE_i\sigma_i})=1$。

• 若 $q_i=0$ 或 $E_i\sigma_i<\infty$，则称 i 正常返。若 $q_i>0$，i 常返 $E_i\sigma_i=\infty$，则称 i 零常返。

• i 正常返当且仅当存在$\delta>0$，i 是δ骨架的正常返态当且仅当任意$\delta>0$，……

• 若 $i\leftrightarrow j$，则 i 正常返当且仅当 j 正常返。

• 若 S 上的概率测度π满足任意 $t\geqslant 0$，$\pi P(t)=\pi$，则称π是不变分布；若测度满足上式，则称为不变测度。若 $X_0\sim\pi$，则 $X_t\sim\pi$。

• 若随机过程$\{X_t:t\geqslant 0\}$满足任意 $s>0$，$n\in N$，$0<t_1<\cdots<t_n$，$X_{s+t1},\cdots,X_{s+tn}$ 和 $X_{t1},\cdots,X_{tn}$ 同分布，则称 X 是平稳过程。

• 若连续时间参数马氏链 X 以不变分布π为初始分布，则 X 是平稳过程。

• 设 Q 保守、非爆炸，则$\pi Q=0$ 当且仅当$\pi P(t)=\pi$。

• 连续时间马氏链有不变分布，嵌入链可能没有不变分布，反之亦然。

• 设 X 不可约，π是 X 的不变分布，则任意 $i,j\in S$，$\lim_t P_{ij}(t)=\pi_j$。

• 设 X 不可约，保守、非爆炸，则下列叙述等价：1° 所有状态正常返；2° 存在正常返；3° 不变分布存在，为$\pi_i=1/q_iE_i\sigma_i$。

• 遍历定理：X 不可约，保守非爆炸，正常返π是不变分布，f 是 S 上的有界函数，则任意初分布μ，$P_\mu(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds=\sum_{i\in S}\pi_i f(X_i))=1$。

• 设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$连续时间马氏链，给定 $T>0$，令 $Y_t=X_{T-t}$，称 $Y=\{Y_t\}$位 X 的时间倒逆过程。Y 也是连续时间马氏链，若 X 平稳，则 Y 时齐。

• 设 $X=\{X_t:0\leqslant t\leqslant T\}$与$\{X_{T-t}:0\leqslant t\leqslant T\}$同分布，则称 X 可逆。若 X 可逆，则 X 平稳，初分布满足细致平衡条件：$\pi_ip_{ij}(t)=\pi_jp_{ji}(t)$。

• 若 X 的初始分布π满足细致平衡条件，则 X 可逆。

• 连续时间时齐马氏链 X 可逆当且仅当 X 初始分布π满足细致平衡条件。

• 若 S 有限，S 上概率分布π是 X 可逆分布当且仅当$\pi_iq_{ij}=\pi_jq_{ji}$。

• 设连续时间马尔科夫链 X 不可约，保守、非爆炸，有转移速率矩阵 Q，不变

分布π，则π是 X 可逆分布当且仅当$\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}$。
• 设连续时间参数马尔科夫链 X，转移速率矩阵 Q，若 S 上非零测度μ使得$\mu_i q_{ij}=\mu_j q_{ji}$，则称对称/配称测度。
• Kolmogorov 准则：不可约、保守、非爆炸马氏链 X 存在配称测度的充要条件是 Kolmogorov 环条件成立：任意状态环路 $i_1\to i_2\to\cdots\to i_s\to i_1$，有 $q_{i_1i_2}q_{i_2i_3}\cdots q_{i_si_1}=q_{i_1i_s}q_{i_si_{s-1}}\cdots q_{i_3i_2}q_{i_2i_1}$。此时，固定 $i_0\in S$，取一条 i_0 到 i 的通路，$i_0\to i_1\to\cdots\to i_m\to i_{m+1}=i$，

$\mu_i=\prod_{k=0}^{m}\frac{q_{i_ki_{k+1}}}{q_{i_{k+1}i_k}}$，$\mu_{i0}=1$，则$\mu$是配称测度。若可归一化，则是可逆分布。

2.5 排队系统

A：input data~PP(λ)；M(memoryless)，GI(generate data independent)，D(discriminant)
B：service time distribution：M，G
S：numbers of services
m：waiting capacity
M/M/N 模型：input：PP(λ)；service：Exp(μ)；N waiters。X_t：t 时刻等待及正接受服务的顾客总数，是时齐马氏链。P([t,t+h)中有两个以上顾客到达)=o(h)。P([t,t+h)中有两个以上顾客结束服务|X_t=i)=o(h)。P([t,t+h)内有一个顾客到达且有一个顾客结束服务)=o(h)。$p_{ii}(h)=1-[\lambda+\mu\min(N,i)]h+o(h)$，$p_{i,i+1}(h)=\lambda h+o(h)$，$p_{i,i-1}(h)=\mu\min(N,i)h$
• X 存在不变分布当且仅当$\lambda<N\mu$。

• 对于 M/M/1 模型，不变分布为$\pi_i=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$。

3 布朗运动

3.1 定义

• 设{ξ_n:n≥1}i.i.d.随机变量序列，P(ξ_n=1)=P(ξ_n=-1)=1/2。粒子每隔Δt时间向左或向右平移Δx，时刻 t 粒子位置记为 X_t，则 $X_t=\Delta x\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]}\xi_k$。$EX_t=0$，$Var(X_t)=\Delta x^2[t/\Delta t]$，

取 $\Delta x=\sigma\sqrt{\Delta t}$，则 $VarX_t\to\sigma^2t$，$P(\frac{X_t}{\sqrt{Var(X_t)}}\le x)\to\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$，$X_t\sim N(0,\sigma^2t)$。

• 若连续时间参数实值随机过程 B={B_t:t≥0}满足：1° B_0=0；2° B 具有独立增量性；3° $B_{s+t}-B_s\sim N(0,\sigma^2t)$；4° 几乎所有轨道 B_t 关于 t 连续。则称 B 为一维零初值布朗运动。当$\sigma^2=1$ 时称为标准布朗运动。
• 若 Z~μ，则{Z+B_t}称为初分布为μ的布朗运动，其概率分布称为维纳测度。

• 任意 $0<t_1<\cdots<t_n$，($B_{t1},\cdots,B_{tn}$)~n 维正态分布，密度 $p=\prod_{k=1}^{n}p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)$，

其中 $p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2t}}e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2t}}$ （转移概率密度）。

• 设{X_t:t≥0}任意有限维分布都是正态分布，任意 s,t≥0，Cov(X_s,X_t)=σ^2min(s,t)，EX_t=0，则{X_t:t≥0}满足 BM 定义中的(2)(3)。

• 设 B={B_t:t≥0}是零初值布朗运动，则下列过程都是布朗运动：1° {-B_t:t≥0}；2° 给定 T>0，{B_{T-t}-B_T:0≤t≤T}；3° 给定 T>0，{B_{T+t}-B_T:t≥0}；4° 任意 a>0，$\{\frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}:t\geq 0\}$；5° $\{tB_{\frac{1}{t}}1_{\{t>0\}}:t\geq 0\}$。

• 若{$B_t^{(i)}$}是 n 个相互独立的一维布朗运动，B_t=($B_t^{(1)}$,…,$B_t^{(n)}$)称 n 维布朗运动。

• 设{B_t:t≥0}n 维标准布朗运动，O=(o_{ij})是 n×n 正交阵，X_t=OB_t，则{X_t:t≥0}仍是 n 维标准布朗运动。

3.2 Donskev 不变原理(泛函中心极限定理)

• 设ξ_1,…,ξ_n独立同分布随机变量序列，P(ξ_1=1)=P(ξ_1=-1)=1/2。S_n=$\Sigma_k\xi_k$，S_0=0，则根据 CLT，$\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$。B={$B_t$:t≥0}为标准布朗运动，$B_0$=0，$B_1$~N(0,1)，则$\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}B_1,\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}B_t,(\frac{S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{S_{[nt_m]}}{\sqrt{n}})\xrightarrow{d}(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})$。任意有界连续函数 f:$R^m$→R，$Ef(\frac{S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{S_{[nt_m]}}{\sqrt{n}})\to Ef(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$。

•将 SRM 轨道折线连接，当 m<t<m+1 时，令 S_t=(m+1-t)S_m+(t-m)S_{m+1}。对任意给定 n∈N，令$C_t^{(n)}=\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$，t≥0。任意轨道，给出了Ω→C[0,+∞)上的一个映射。任意 f,g∈C[0,+∞)，d(f,g)=$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\min(\|f-g\|_n,1)}{2^n}$，其中‖f-g‖$_n$=max$_{0\leqslant t\leqslant n}$‖f(t)-g(t)‖。

• 若 F:C[0,+∞)→R 满足任意给定 f，ε>0，存在δ>0，使得 f∈C[0,+∞)，d(f,g)<ε时，|F(f)-F(g)|<δ，则称 F 连续。若存在 M>0，使得|F(f)|≤M，则称 F 有界。

• Donskev 不变原理：任意 C[0,+∞)上有界连续泛函，lim$_n$EF($C^{(n)}$(t))=EF(B(t))。

• Khinchine：设{S_n:n≥0}一维简单随机游动，则$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=1$ a.s.。

• 布朗运动重对数律：{B_t:t≥0}一维标准布朗运动，则$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1$ a.s.。

3.3 轨道性质

•若定义在(Ω,F)上取值于[0,+∞]的广义随机变量 T 满足任意 t≥0，{T≤t}({T<t})发生与否由{X_s:0≤s≤t}决定，则称 T 是停时（宽停时）。

• 任意 G 是 R 中开集，T_G=inf{t≥0:B_t∈G}，则称 T_G是 B 的宽停时。

• 若 F 是 F 中闭集，T_F=inf{t≥0:B_t∈F}，则 T_F是 B 的停时。

• 强马氏性，强再生性：设 B={B_t:t≥0}标准 BM，T 是 B 的停时，P(T<+∞)=1，则{B_{T+t}-B_T:t≥0}是标准布朗运动，且与{B_s:0≤s≤T}独立。

• 反射原理：设 T 是 B 的停时，记$\widetilde{B}_t(w)=\begin{cases}B_t(w),t<T(w)\\2B_T(w)-B_t(w),t\geq T(w)\end{cases}$仍是布朗运

动，且和 B_t 同分布。

• 任意 a＞0，$P_0(T_a \leqslant t)=2P_0(B_t \geqslant a)=2\int_a^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx$。

• $B_0=0$，∀a＞0，T_a 连续型随机变量，$P_0(T_a<\infty)=1$，概率密度 $p(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{2t}}$

• 设 $B_0=0$，$M_t=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}B_s$，则 M_t 是连续性随机变量，其概率密度 $p(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

（x≥0）【利用 $P_0(M_t \geqslant a)=P_0(T_a \leqslant t)=2P_0(B_t \geqslant a)$】
• 任意 t＞0，P_0(存在 $t_1<t_2<t$ 使得 $B_{t1}=B_{t2}=M_t$)=0。

• 设{ξ_n:n≥1}独立同分布随机变量序列，期望有限，则 $P(\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{n}=0)=1$。

• $P_0(\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t}=0)=1$。
• 反正弦律：令 $L_t=\sup\{s\in[0,t]:B_s=0\}$（布朗运动 B 在[0,t]上最后一个零点），

则 $P_0(L_t \leqslant s)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}$。

• 设 $\sigma_0=\inf\{t>0:B_t=0\}$，则 $P_0(\sigma_0=0)=1$。
• 布朗运动轨道零点集是完全集，即每一点都是聚点。
• 对于几乎所有布朗轨道，对于所有(a,b)，B 在(a,b)上不是 t 的单调函数。
• 几乎所有布朗轨道处处不可微。
• 任意γ＜1/2，几乎所有布朗轨道γ阶 Holder 连续。

3.4 位势理论

• 任意 a≤x≤b，$P_x(T_b<T_a)=\frac{x-a}{b-a}$。
• Wald 引理：给定 a≤x≤b，$T=\min(T_a,T_b)$，则 $E_xB_T=x$。
• Wald 第二引理：$E_x(B_T-x)^2=E_xT=(x-a)(b-x)$。

3.5 马氏过程与高斯过程

•设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$实值随机过程，若 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<t$，s＞0，x∈R，以及 $B_1,\cdots,B_n$，A∈Borel(R)，$P(X_{t+s}\in A|X_t=x,X_{tn}\in B_n,\cdots,X_{t1}\in B_1)=P(X_{t+s}\in A|X_t=x)$，则称 X 是一个马氏过程。
• 若存在 $P_{s,t}(x,y)$使得 $P(X_t\in A|X_s=x)=\int_A p_{s,t}(x,y)dy$，则称 $p_{s,t}(x,y)$为 X 的转移概率密度。若时齐，则记为 p(t-s,x,y)。
• 若 n 维随机向量 X 特征函数 $Ee^{itX}=\exp\{i\mu t-t^T\Sigma t/2\}$，则称高斯分布。
• 若随机过程 $X=\{X_t:t\in I\}$满足任意 n≥1，$t_1,\cdots,t_n\in I$，$(X_{t1},\cdots,X_{tn})$服从高斯分布，则称高斯过程。
• 若 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$是高斯过程，$Cov(X_s,X_t)=\min(s,t)$，则 X 是独立增量过程。
• 布朗桥：$X_t=B_t-tB_1$ 或 $B(t)|_{B(1)=0}$。都是高斯过程。
• OU 过程：$B=\{B_t:t\geqslant 0\}$标准布朗运动，$X_t=e^{-\alpha t}B_{e^{\wedge}2\alpha t}(\alpha>0)$，X 时齐马氏过程，$X_{s+t}=e^{-\alpha t}X_s+e^{-\alpha(s+t)}(B_{e^{\wedge}2\alpha(s+t)}-B_{e^{\wedge}2\alpha s})=e^{-\alpha t}X_s+Y$，Y 于 X_s 独立，$Y\sim N(0,1-e^{-2\alpha t})$，转移概率密度……，X 平稳马氏过程，$\mu(y)=1/\sqrt{2\pi}*e^{\wedge}(-y^2/2)$。

3.6 随机分析简介

• $dX_t=b(X_t)dt$，$dX_t^{\varepsilon}=b(X_t^{\varepsilon})+\varepsilon dB_t$，…

• 下面考虑 $dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t$，等价有 $X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s$。

•与漂移系数相关积分：$L^2(\Omega,F,P)$，定义$(X,Y)=EXY$，诱导出范数、距离。若$\{X_n\}$满足 $E(X_n-X)^2\to 0$，则称 X_n 均方收敛到 X。L^2 是 Hilbert 空间。

• 任意 $t\in T,EX_t^2<\infty$，则称$\{X_t:t\in T\}$为二阶矩过程。

• 任意$[0,t]$分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，$\lambda=\max(t_{k+1}-t_k)$，任意 $s_k\in[t_k,t_{k+1}]$，$L_2\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\Sigma_{k=0}^{n-1}X_{Sk}(t_{k+1}-t_k)$存在，则称 X_t 在$[0,t]$均方可积，定义$\int_0^t X_s ds$ 为上述极限。若 $L_2\text{-}\lim_{t\to t0}X_t=X_{t0}$，则称$\{X_t\}$在 t_0 均方连续。若均方连续，则均方可积。

• 布朗运动均方连续，$f:[a,b]\to R$ 连续，则 $f(t)B(t)$均方连续。$E\int_a^b f(s)B_s ds=0$，$E(\int_a^b f(s)B_s ds)^2=\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)EB_sB_t dsdt$。

• 随机积分：$\int_0^t B_s dB_s$，$\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s$。当$\lambda\to 0$ 时，$E\left(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^2-t^2\right)\to 0$。

•若 f_t 均方连续，则 $\int_0^t f_s dB_t=L_2-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f_{t_k}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$(Ito 随机积分)。取 f(s)中点叫作 Stratonovich 积分。Ito：$\int_0^t B_s dB_s=\frac{1}{2}B_t^2-\frac{t}{2}$。

• 设$\{X_t:t\geqslant 0\}$满足 SDE：$X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s$，即

$$dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(s,X_s)dB_s,$$

$f:R_+\times R\to R$ 连续，偏导数$\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$存在连续，则 $f(t,X_t)$满足 SDE：（Ito 公式）

$$f(t,X_t)=f(0,X_0)+\int_0^t(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}b+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(s,X_s)ds+\int_0^t(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma)(s,X_s)dB_s,$$

$$df(t,X_t)=(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}b+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(t,X_t)dt+(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma)(s,X_s)dB_t。$$