高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 12 月 25 日

目录

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{cases}$.

2. 设 $\alpha_1 = (1,1,4), \alpha_2 = (-2,1,5), \alpha_3 = (a,2,10), \beta = (1,b,-1)$. 当 a,b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

4. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1,y_2,y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解?

6. 已知向量 α,β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$. 设 $u,v\in\mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\overrightarrow{OC} = u\alpha + v\beta$ 的终点 C 在什么位置, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的比值是多少, 何时比值为正数.

7. 求单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线.

8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.

9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? $\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}$, $\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$.

10. 考虑带截距的线性回归 $y \sim x_1 + \cdots + x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2 解答

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4) = (-8,3,6,0).$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-=4*①]{②-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq -4$ 或 $a=-4, b=-\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

4. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②- = 8*① \\ ③- = 5*① \\ ④- = 15*①}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{③+ = 10*② \\ ④- = 5*②}}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+ = \frac{2}{3}*③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25})$.

5. (1) $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②- = 2*① \\ ③- = i*①}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{③- = \frac{i}{2+2i}*②} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②* = \frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3) = \{(t,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3) = \{(t,0,t) : t \in \mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{u} = \frac{v}{1-v}$, 因此 A,C,B 三点共线, 且当 $0 < u,v < 1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x - z = k(1-y) \\ x + z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x + ky - z = k \\ kx - y + kz = 1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A = (x_1,y_1,z_1), B = (x_2,y_2,z_2), C = (x_3,y_3,z_3)$, 设 BC, AC, AB 中点分别为 D,E,F, 设 $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ 只需验证 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1,-1)$ 和 $(-666, 834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 第 2 次习题课: 矩阵的基本运算, 集合论

2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x + 2y + 3z = 1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k, l \in \mathbb{R}$ 的平面方程.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX = 0$; (2) 已知 $X = (1,1,2,3,0)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的一个解, 写出 $AX = \beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 且 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 又能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$, 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$.

6. 考虑 n 个城市之间的航班问题: 记 $H=(a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i,j) 元的含义; (2) 设 $H=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&3\\0&0&2&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?

7. 设 A 是有向图 G 的邻接矩阵, 证明 G 中的循环三角形的个数等于 $\mathrm{tr}(A^3)/3$.

8. 由集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 A 非空, 证明 $\mathrm{card}(P(A))>\mathrm{card}(A)$.

9. X 为非空集合, 映射 $f:P(X)\to P(X)$ 满足 $f(A)\subset f(B),\forall A\subset B$. 那么存在 $T\subset X$ 使得 $f(T)=T$.

10. (1) 找到 $[0,1]$ 到 $[0,1]\times[0,1]$ 的双射; (2) 找到 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射.

11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 X 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 X 并给且只给 X 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?

12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1,0,0)$, 再去求 $x+2y+3z=0$ 的一组基础解系: $(2,-1,0)$ 和 $(3,0,-1)$, 因此向量表示为 $(1,0,0)+k(2,-1,0)+l(3,0,-1),k,l\in\mathbb{R}$.
(2) 先求得一个点坐标 $(0,-1,1)$, 再去求方向向量 $(1,2,3)\times(3,2,1)=(-4,8,4)$, 因此向量表示为 $(0,-1,1)+t(-1,2,1),t\in\mathbb{R}$.
(3) 先求得一个点坐标 $(1,1,2)$, 再去求法向量 $(1,2,0)\times(2,0,1)=(2,-1,-4)$, 因此平面可表示为 $2x-y-4z=-7$.

2. (1) $$\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\3&6&-1&0&7\\1&2&2&0&7\\2&4&1&1&9\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{④}-=\text{①}]{\substack{\text{②}-=\frac{3}{2}*\text{①}\\ \text{③}-=\frac{1}{2}*\text{①}}}\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\0&0&-\frac{5}{2}&0&-5\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{②}+=\frac{5}{3}*\text{③}]{\text{①}-=\frac{2}{3}*\text{③}}\begin{bmatrix}2&4&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_4=-x_5\\x_3=-2x_5\\x_1+2x_2=-3x_5\end{cases}\Rightarrow$$
$X=(-3n-2m,m,-2n,-n,n)^T,m,n\in\mathbb{R}$ 是自由变元.
(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1-3n-2m,1+m,2-2n,3-n,n)^T$.

3. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.

4. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\nmid 3$, 因此不是素数.

5. $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A,(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\beta_1,\cdots,\beta_s)B\Rightarrow(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.

6. (1) 从 $a_{ij}^2=\sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i,j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1\to 3,1\to 4,2\to 1,2\to 5,3\to 2,3\to 4,4\to 1,5\to 2,5\to 3$, 分别有 $1,1,1,3,1,3,3,1,2$ 种航班选择; $2\to 4,4\to 2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

7. 由上题知 A^3 的 (i,i) 元表示从 i 到 i 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.

8. 本题的关键是处理集合 A 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f:A\mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A=\{x:x\notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A)\notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A)\in A$; 反之亦矛盾.

9. 我们的思路应当去找满足条件 $A\subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T=\{\cup_\alpha A_\alpha:A_\alpha\subset f(A_\alpha)\}$. 根据定义有 $T=\cup_\alpha A_\alpha\subset\cup_\alpha f(A_\alpha)=f(\cup_\alpha A_\alpha)=f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T)\subset f(f(T))\Rightarrow f(T)\subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots\to(0.a_1a_3a_5\cdots,0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$.
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 pip install numpy 开始. 学习使用 np.zeros, np.random, np.mean, np.sum, np.dot, np.linalg.det, np.eye 等函数, 并做切片和取值运算.

3 第 3 次习题课: 行列式 (1)

3.1 问题

1. 用行列式求解线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2=7\\5x_1+4x_2=6\end{cases}$.
2. 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积: $\alpha_1=(3,2,1),\alpha_2=(0,3,0),\alpha_3=(7,4,2)$.
3. 判断以下向量组的定向: $(1,1),(3,-2)$; $(2,1,0),(1,0,3),(1,1,1)$; $(x,y,z),(z,x,y),(y,z,x)$; $(x,y,z),(y,z,x),(z,x,y)$; 其中 $x+y+z>0$ 且互不相等.
4. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix}x-2&2&-2\\2&x+1&-4\\-2&-4&x+1\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}3&2&0&0\\5&3&0&0\\-12&-4&3&4\\3&x&5&7\end{vmatrix}$.
5. 对 n 阶矩阵 A 作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的 k 倍, 第 2 行加上第 3 行的 k 倍, 以此类推; 最后, 第 n 行加上此时第 1 行的 k 倍. 问做这些变换相当于在 A 左边乘一个什么样的矩阵? A 的行列式值会如何变化? 如果第 n 行加上的是原来第 1 行的 k 倍呢?
6. 计算行列式 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\b_2&1&0&\cdots&0\\b_3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$.
7. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&x_1x_3&x_1x_4\\x_2x_1&1+x_2^2&x_2x_3&x_2x_4\\x_3x_1&x_3x_2&1+x_3^2&x_3x_4\\x_4x_1&x_4x_2&x_4x_3&1+x_4^2\end{vmatrix}$.
8. 计算行列式 $\begin{vmatrix}x_1-a_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1&x_2-a_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1&x_2&x_3-a_3&\cdots&x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n-a_n\end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$.
9. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\alpha&\beta&&&\\\gamma&\alpha&\beta&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\gamma&\alpha&\beta\\&&&\gamma&\alpha\end{vmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 $\alpha^2-4\beta\gamma>0$.
10. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos\alpha&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos\alpha&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2\cos\alpha&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

11. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

3.2 解答

1. $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$

2. $V = ||(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|| = |\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = 3.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow$ 左手; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow$ 左手; $\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow$ 右手; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow$ 左手.

4. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式有变化, 因为最后一步不是初等变换, 相较于原值乘上了 $1 + (-1)^{n-1}k^n$.

6. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2, 3, \cdots, n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

7. 法 1(加边法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1 行的 x_i 倍, $i = 1, 2, 3, 4$, 得到 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

法 2(拆项法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$
$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五项: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}$, 原行列式是 $1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

8. 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 $n+1$ 项: $\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$
$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \cdots$, 它们分别是 $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}x_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}a_1x_2\cdots a_n, \cdots$, 整理得到原行列式为 $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i}\right)-1\right]$.

9. 若 $\beta\gamma=0$, 则行列式为 α^n. 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n=\alpha D_{n-1}-\beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1=\alpha, D_2=\alpha^2-\beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n = A\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n + B\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n$, 代入 $n=1,2$ 解出 A 和 B, 得到 $D_n = \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}$.

10. $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$; $n=2$ 时, $D_2=\cos 2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n=\cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1}=2\cos\alpha D_n - D_{n-1}=\cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

11. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 n 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n-1$ 列减去第 n 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n=\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2, 得

$$D_n=\frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i=a_j$ 或 $b_i=b_j(i\neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n=0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}D_n'$. 显然 D_n' 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D_n' 的 (i,j) 元为 $\prod_{k\neq j}(a_i+b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D_n' 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此设 $D_n=\lambda\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 为确定常数 λ 的值, 我们不妨令 $a_i=-b_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 此时 D_n' 为对角行列式, 且有 $D_n=\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\Rightarrow\lambda=1$. 因此可得一样的结果.

4 第 4 次习题课: 行列式 (2)

4.1 问题

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\ n&1&2&\cdots&n-1\\ n-1&n&1&\cdots&n-2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 2&3&4&\cdots&1\end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\ a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\ a_{n-1}&a_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{vmatrix}$ 的通式吗?

2. (1) 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\ c&a&b&\cdots&b\\ c&c&a&\cdots&b\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c&c&c&\cdots&a\end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n=\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b\\ c&a_2&b&\cdots&b\\ c&c&a_3&\cdots&b\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c&c&c&\cdots&a_n\end{vmatrix}$.

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A|=a,|A-\alpha\alpha^T|=b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$.

4. 考虑 3 线行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&c_2&&&\\ b_2&a_2&c_3&&\\ &b_3&a_3&\ddots&\\ &&\ddots&\ddots&c_n\\ &&&b_n&a_n\end{vmatrix}$, 记其顺序主子式为 $D_1,D_2,\cdots,D_n$, 并假设它们都不为 0. 证明递推关系 $D_s=a_sD_{s-1}-b_sc_sD_{s-2},s\ge 3$, 并将该矩阵 M_n 写成下三角矩阵和对角元都为 1 的上三角矩阵的乘积.

5. 试确定所有 3 阶 $(0,1)$ 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\ 1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

7. 设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2}=1$.

8. 若方阵每一行每一列都恰有一个元素为 1, 其余的元素都是 0, 则称此方阵为置换矩阵. (1) 写出所有的 3 阶置换矩阵. 这些矩阵最少可由其中的几个通过反复作乘法得到? (2) 证明任意 n 阶置换矩阵都可由以下 $n-1$ 个矩阵反复作乘法得到: $\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$.

进一步, 任意 n 阶置换矩阵都可由以下两个矩阵反复作乘法得到: $T=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$.

9. 设 $n\geq 3, f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_1)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}\equiv 0$, 并举例说明条件 "次数 $\leq n-2$" 不可去.

10. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&\cos\phi_1&\cos 2\phi_1&\cdots&\cos(n-1)\phi_1\\1&\cos\phi_2&\cos 2\phi_2&\cdots&\cos(n-1)\phi_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cos\phi_n&\cos 2\phi_n&\cdots&\cos(n-1)\phi_n\end{vmatrix}$.

4.2 解答

1. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&2&2&\cdots&2-n&2-n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1\\n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&2-n&2-n\\1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}.$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\n-2&-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&0&\cdots&-n&-n\\1&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-n&\cdots&-n&-n\\&\ddots&\vdots&\vdots\\&&-n&-n\\&&&-n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

2. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b&b\\c-a&a-b&0&\cdots&0&0\\0&c-a&a-b&\cdots&0&0\\0&0&c-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&c-a&a-b\end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-c)\cdots(a_{n-1}-c) + (a_n-b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n = c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b) + (a_n-c)E_{n-1}$. 两式联立得 $E_n = \dfrac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x) = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$.

3. 考虑函数 $f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0) = a, f(-1) = b$ 知 $f(x) = a + (a-b)x$, 因此 $f(2) = 3a - 2b$.

4. 按最后一行展开立刻得到递推关系, $M_n = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & & & & \\ b_2 & \frac{D_2}{D_1} & 0 & & & \\ & b_3 & \frac{D_3}{D_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & b_{n-1} & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} & 0 \\ & & & & b_n & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2\frac{1}{D_1} & & & & \\ & 1 & c_3\frac{D_1}{D_2} & & & \\ & & 1 & c_4\frac{D_2}{D_3} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & c_n\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$.

5. 按第 1 行展开, 得到 $D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \le 3$. 下面证明 $D \ne 3$. 若不然, 则必有 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, 且 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} = a_{31} = 1$, 而此时 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \le 0$, 矛盾. 因此 $D \le 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

6. 注意到 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n1(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$(利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!, k = 3, 4, \cdots, n$ 即可.

7. 首先容易看出 $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0$. 其次 $|A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1.$$

8. (1) 所有 3 阶置换矩阵: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可由其中第 2 个和第 5 个做反复乘积生成 (答案不唯一). (2) n 元置换可以分解成至多 $n-1$ 个对换的乘积, 而每一个对换都可以分解成

相邻对换的乘积, 因此可被这 $n-1$ 个相邻对换生成; 进一步, 所有相邻对换都可被表示为 $S^{n-k}TS^k, k=0,1,\cdots,n-1$, 因此可被 S,T 生成.

9. 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同. 考虑 $F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & a_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件 "次数 $\le n-2$", 则可令 $f_k(x)=x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同就不为 0.

10. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + P_{k-2}(\cos\theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos^2\phi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos^2\phi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos^2\phi_n & \cdots & \cos^{n-1}\phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(\cos\phi_i - \cos\phi_j).$$

5 第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)

5.1 问题

1. 在正实数集 $\mathbb{R}^+$ 上定义运算加法 $a\oplus b = ab, \forall a,b\in\mathbb{R}^+$ 和数乘 $ka=a^k, \forall k\in\mathbb{Q}$, 证明 $\mathbb{R}^+$ 在这两种运算下构成 $\mathbb{Q}$-线性空间; 并问 $110, \sqrt{105}$ 是否属于 $\mathrm{span}\{1,2,\cdots,10\}$.

2. 设 $W=\{f(x)|f(1)=0, f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

3. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$; (2) $\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3+\alpha_4$; (3) $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$; (4) $\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2+8\alpha_4, \alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4, 3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1-\alpha_3$.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量, 且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$. 证明向量组 $\beta-\alpha_1, \beta-\alpha_2, \cdots, \beta-\alpha_s$ 线性无关的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

6. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

7. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$.

9. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, I 表示 n 阶单位矩阵. 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2=\begin{vmatrix} I & -B \\ 0 & AB \end{vmatrix}$, 并证明 $D_1=D_2$.

10. 求 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 A, 其中 $a_{ij}=\frac{\alpha_i^n-\beta_j^n}{\alpha_i-\beta_j}, i,j=1,2,\cdots,n$.

5.2 解答

1. 交换律结合律显然; 零元存在: $1 \oplus a = a \oplus 1 = a$; 负元存在: $a \oplus \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \oplus a = 1$; 幺元存在: $1a = a^1 = a$; 左分配律: $(k+l)a = a^{k+l} = a^k a^l = ka \oplus la$; 右分配律: $k(a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = ka \oplus kb$. $\sqrt{105}$ 属于, 因为 $105 = \frac{1}{2}(3 \oplus 5 \oplus 7)$; 110 不属于, 因为整数只能生成它的倍数的某个次方, 而 $110 = 11 \times 10$ 其中 11 是素数无法生成.
2. (1) 容易证明对 $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$, 因此 $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W = n-1$.
3. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$, $-5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;
(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.
4. (1) 线性相关; $(\alpha_1+\alpha_2) - (\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_3+\alpha_4) - (\alpha_4+\alpha_1) = 0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.

5. 用矩阵表示为 $(\beta-\alpha_1, \beta-\alpha_2, \cdots, \beta-\alpha_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)P$. 容易计算得到 $\det P = (s-1)(-1)^{s-1} \neq 0$, 因此两者线性无关等价.

6. (1) 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m (a_m \neq 0)$. 取 $x_k = k$ 代入, 得到线性方程组 $\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_m x_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^m = f(x_1), \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_m x_m^m = f(x_m). \end{cases}$, 其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i = \frac{D_i}{D}, i = 0, 1, \cdots, m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

7. 按第 3、4 行展开: $D = (-1)^{3+4+1+6}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$. 再按第 2、3 行展开: $D = (-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -24$.

8. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a = 0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1 = (-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (be-cd)^2$. 若 $a \neq 0$, 则将第 1 行的 $\frac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\frac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到 $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f + \frac{cd}{a} - \frac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f + \frac{be}{a} - \frac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}$. 然后按第 1、2 行展开, 得到 $D_1 = (af - be + cd)^2$.
后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2 = 0$ (因为 $|M_2| = |M_2^T| = |-M_2| = (-1)^{2k+1}|M_2| \Rightarrow |M_2| = 0$).
9. 按前 n 行展开, 得到 $D_1 = |A||B|$, $D_2 = |AB|$. 将后面 n 行减去前面 n 行的 A 倍 (按矩阵 $(I, -B)$ 左乘 A 理解), 可使 M_1 转化为 M_2.
10. 利用 $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB| = |A||B|$, 知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \le j < i \le n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j).$$

6 第 6 次习题课: 秩 (1)

6.1 问题

1. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&5&2&-1\\4&-1&9&3&4\\3&-2&8&-2&1\\1&1&1&4&4\\3&1&5&8&6\end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?

2. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\cdots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量线性无关, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.

3. 证明: 若组 I 能线性表出组 II, 且 $\mathrm{rank}(\mathrm{I})=\mathrm{rank}(\mathrm{II})$, 则组 II 也能表出组 I.

4. 矩阵 A,B,C 满足 $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$. 证明: (1) A 的列向量组能线性表出 C 的列向量组; (2) $\mathrm{rank}(A)\geq\mathrm{rank}(C)$; (3) 若矩阵 B 行满秩, 则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(C)$, 且 C 的列向量组也能线性表出 A 的列向量组.

5. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-2&\lambda&5\\1&2&-3&1\end{bmatrix}$ 的秩.

6. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\leq i\leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明 $\det(A)\neq 0$. 进一步, 证明若 $a_{ii}>0,\forall 1\leq i\leq n$, 则 $\det(A)>0$.

7. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 (1) $a_{ii}>0,\forall 1\leq i\leq n$; (2) $a_{ij}<0,\forall 1\leq i\neq j\leq n$; (3) $\sum_{i=1}^n a_{ij}=0,\forall 1\leq j\leq n$. 求矩阵 A 的秩.

8. 设线性方程组 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}=b_i, 1\leq i\leq n$ 的系数矩阵 A 的秩等于矩阵 $B=\begin{bmatrix}A&b\\b^T&0\end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

9. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n},\beta=(b_1,\cdots,b_m)^T$. 证明下列命题相互等价: (1) $Ax=\beta$ 有解; (2) $A^Tx=0$ 的解均满足 $x^T\beta=0$; (3) 方程组 $\begin{pmatrix}A^T\\\beta^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0_{1\times n}\\1\end{pmatrix}$ 无解.

10. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}|>\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\sum_{l\neq j}|a_{jl}|$ 对任意 $1\leq i\neq j\leq n$ 成立. 证明 $\det(A)\neq 0$.

11. 利用矩阵 $\begin{pmatrix}I_{s\times s}&0_{s\times m}\\0_{n\times s}&A_{n\times s}B_{s\times m}\end{pmatrix}$ 的初等行列变换证明 $s+\mathrm{rank}(AB)\geq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.

12. 设 A,B 是幂等矩阵 (即 $A^2=A,B^2=B$), 且 $I-A-B$ 满秩, 证明 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

6.2 解答

1. A 的简化阶梯型矩阵是 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 β_1,β_2,β_4, 且 $\beta_3=2\beta_1-\beta_2,\beta_5=3\beta_1+5\beta_2-\beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 且 $\alpha_3=-\frac{31}{9}\alpha_1-\frac{55}{9}\alpha_2+\frac{17}{9}\alpha_4,\alpha_5=-\frac{20}{9}\alpha_1-\frac{23}{9}\alpha_2+\frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a=4,b=2$.

2. 只需证明能表出 α_1. 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1}=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix}I_{r\times r}\\0_{(s-r)\times r}\end{bmatrix}$(可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出.

3. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α, 由于组 I 能表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$, 从而 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha)\leq s$, 即 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$ 线性相关. 由于 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 因此它们能表出 α.

4. (1) 由矩阵乘法定义知 $c_i = b_{1i}a_1 + \cdots + b_{ni}a_n, \forall 1 \leq i \leq p$. (2) 由第 (1) 问结论立得. (3) 用第 2 题结论立得.
5. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda = 0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4 列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.
6. (1) 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \cdots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 $\det(A) \neq 0$.
(2) 考虑函数 $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. 那么任意 $t \in [0,1]$, $A(t)$ 都是主对角阵占优矩阵, 因此 $\det(A(t)) \neq 0$. 由于 $\det(A(0)) > 0$, 由函数连续性知 $\det(A(1)) > 0$, 此即原命题.
7. 首先由条件 (3) 知 $|A| = 0$, 因此 $\text{rank}(A) \leq n-1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11}, 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11} > 0$. 这意味着 $\text{rank}(A) = n-1$.
8. (1) $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A,b) \leq \text{rank}\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.
(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$, $\text{rank}(A) = 2$, 而 $\text{rank}(B) = 3$.
9. (1) $\Rightarrow$ (2): 设 $A\xi = \beta$, 从而 $x^T\beta = x^TA\xi = (A^Tx)^T\xi = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (3): 显然.
(3) $\Rightarrow$ (1): $\text{rank}\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < \text{rank}\begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 即是 $\text{rank}(A,\beta) < \text{rank}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \leq \text{rank}\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \text{rank}\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + 1$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A,\beta)$, 从而方程组 $Ax = \beta$ 有解.
10. 反证法. 假设 $\det(A) = 0$, 则 $Ax = 0$ 有非零解 $(c_1, \cdots, c_n)$. 若仅有 $c_i \neq 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i, j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \geq |c_j| \geq |c_k|, i \neq j$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k\neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l\neq j} a_{jl}c_l| \leq |c_j||\sum_{k\neq i} a_{ik}| \cdot |c_i| \sum_{l\neq j} |a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \leq \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \sum_{l\neq j} a_{jl}$, 矛盾.
11. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{②+=A\times①} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow[②-=①\times B]{} \begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}$, 最左边矩阵秩为 $s + \text{rank}(AB)$, 最右边矩阵秩大于等于 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.
12. $A(I-A-B) = -AB$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I-A-B)) = \text{rank}(A)$, 同理 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$.

7 第 7 次习题课: 秩 (2), 线性方程组的解空间

7.1 问题

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 证明 A 的列向量组线性无关当且仅当 A 至少有一个 n 阶非零子式.
2. 设矩阵 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$. (1) 求 $AX = \beta$ 的通解. (2) 求 A 行空间的一组基. (3) 将 A 分解为一个列满秩与一个行满秩矩阵的乘积.
3. 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 r, 并计算其 r 阶非零子式的个数.
4. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 列满秩, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_s), C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_s)$ 满足 $AB = C$. 证明: (1) B 的解空间和 C 的解空间相同; (2) 若 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 线性无关, 则 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \cdots, \gamma_{i_r}$ 也线性无关; 特别地, 有 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C)$.
5. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W) \geq n^2 - n + 1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{x-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{x-c_3}{c_1-c_2}$, $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
7. 设 B 是 3×4 矩阵, $(2,0,1,3)^T$ 是齐次方程组 $BX=0$ 的一个解. 设 A 是将行向量 $(2,0,1,3)$ 添加到 B 的最下面得到的方阵. 已知 A 的 $(4,1)$ 元的余子式为 6, 求 $\det(A)$.
8. A 是 $m\times n$ 矩阵, b 是 $m\times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 总有解.
9. 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的第 (i,j) 元是 a_i-b_j. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n\geq 2$ 且 $a_1\neq a_2, b_1\neq b_2$ 时 $AX=0$ 的解空间维数和一组基.
10. 设 A,B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX=0, BX=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l+m>n$, 那么 $(A+B)X=0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX=0$ 和 $BX=0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β,γ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解向量.
11. A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解. 问 A,B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.
12. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.
13. 证明: $AX=0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.
14. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$.

7.2 解答

1. 充分性: 存在 n 阶非零子式 $\Rightarrow$ 在这 n 阶子式内的列向量组线性无关 $\Rightarrow$ 作为延长组的 A 列向量组线性无关.
必要性: A 列向量组线性无关 $\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=n \Rightarrow$ 行向量组秩也为 $n\Rightarrow$ 存在 n 个线性无关的行向量 $\Rightarrow$ 这 n 个线性无关的行向量构成的子式行列式非零.
2. (1) 其实是去求解方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(2\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2\Rightarrow x_1=1, x_2+2x_4=2, x_3-x_4=0\Rightarrow$ 通解是 $(1,2-2t,t,t)$.
(2)(3) $\operatorname{rank}(A)=3$, 且有分解 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 因此行空间一组基为 $(1,0,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,-1)$.
3. 先求出其行简化阶梯矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有 $2\times 5=10$ 个 3 阶非零子式.
4. (1) 由于 A 列满秩, 因此 $AX=0\Rightarrow X=0$, 即 $CX=ABX=0\Rightarrow BX=0$. 反过来则显然.
(2) 只需注意到 $k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_r\gamma_{i_r}=0\Leftrightarrow(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r})=0\Leftrightarrow k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=0$. 后一问取极大线性无关组知 $\operatorname{rank}(B)\leq\operatorname{rank}(C)$, 由矩阵乘法又知道 $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(AB)\leq\operatorname{rank}(B)$.
5. 将 $M_n(K)$ 的矩阵平铺开看成是 n^2 维的行向量, 并取该子空间的一组基 $A_1,\cdots,A_r$. 把这 r 个行向量在 $\text{axis}=0$ 方向拼成 $r\times n^2$ 的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵 J. 注意到 J 的行向量 $B_1,\cdots,B_r$ 也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某 r 个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取 $n\times n$ 矩阵 A 中的 n^2-n+1 个位置, 我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵 A 其余的 $n-1$ 个位置填什么数, A 的行列式总为 ± 1. 假设命题对 $n-1$ 级的方阵成立, 考察 n 阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第 i 行), 该行的 n 个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第 j 列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取 (i,j) 元为 1, $(i,\neq j)$ 元为 0, 那么在 (i,j) 元的余子式中最多只有 $n-2$ 个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得 (i,j) 元的余子式取 ± 1. 在此填法下, n 阶方阵 A 的行列式是 (i,j) 元的代数余子式, 即 ± 1. 由数学归纳法知命题得证.
6. 由矩阵满秩知 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 和 $(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三

列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3+k(x_1-x_2)=x_1+t(x_2-x_3), x=a,b,c$ 对于 k,t 是否有解. 由于矩阵满秩, 该方程系数必须满足 $t+1=k-1=t+k=0$, 因此 $t=-1,k=1$. 从而两直线相交.

7. 即 $|(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)|=6$, 问 $\left|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ 2 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\right|$. 按第四行展开得 $|A|=2*(-6)-1*|(-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_4,\alpha_2,\alpha_4)|+3*|(-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3)|=-42$.

8. 先证明 $\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A)$. 首先显然 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A)$, 其次 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow\|Ax\|_2^2=0\Rightarrow Ax=0\Rightarrow\mathrm{Ker}(A^TA)\subset\mathrm{Ker}(A)\Rightarrow\mathrm{rank}(A^TA)\ge\mathrm{rank}(A)$. 接着, 由于 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A^TA,A^Tb)\le\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^TA)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

9. (1) $n=1$ 时 $|A|=a_1-b_1$, $n=2$ 时 $|A|=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$. $n>2$ 时由于 $A=\begin{pmatrix}a_1 & -1\\ a_2 & -1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$, 因此 $\mathrm{rank}(A)\le 2$, 从而 $|A|=0$.

(2) $n=2$ 时 $|A|\ne 0$, 因此解空间只有零解, 维数为 0, 不存在基. $n>2$ 时, 由于 $\mathrm{rank}(A)\le 2$ 且显然 $A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}\ne 0$, 因此 $\mathrm{rank}(A)=2$, 解空间维数是 $n-2$. 因此只需解方程 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}X=0$ 即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为 2, 因此同解). 直接计算得到一组基为 $\eta_i=\left(\frac{b_i-b_2}{b_2-b_1},\frac{b_1-b_i}{b_2-b_1},0,\cdots,0,\underbrace{1}_{\text{第}i\text{个}},0\cdots,0\right)^T, i=3,4,\cdots,n$.

10. (1) $n-\mathrm{rank}(AB)\ge\max(n-\mathrm{rank}(A),n-\mathrm{rank}(B))\ge\max(l,m)$.

(2) $\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n-l+n-m<n$, 因此 $(A+B)X=0$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 $AX=0,BX=0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_m\beta_m=0$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_m\beta_m$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l,\{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l=\mu_1=\cdots=\mu_m=0$. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l+m=n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ. 唯一性可由 $\alpha=\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解 $\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1=0$ 得到.

11. 第 1 个结论不对, 比如 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A,B 均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}I_{n\times n}\\ 0_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r\ge 1$ 维, 任取 $AX=0$ 的一个基础解系 $X_1,\cdots,X_r$ 构成 $n\times r$ 矩阵 C. 考虑线性方程组 $C^TX=0$, 其解空间维数为 $n-r=\mathrm{rank}(A)$. 由于 $C^TA^T=0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

12. 注意到 $W_i=\{X\in K^n:(a_{i1},\cdots,a_{in})X=0\}, i=1,2,\cdots,n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0\in K^n\backslash(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

13. 必要性. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}(-\frac{x_k}{x_i})\alpha_k, \forall i=1,\cdots,n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}t_{ki}\alpha_k, \forall i=1,\cdots,n$, 则记 $T=\begin{pmatrix}1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n}\\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n}\\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}$, 从而 $AT=0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

14. (1) 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1=0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^nX=0\Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha\ne 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

8 期中考试

8.1 问题

1. 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

2. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关当且仅当 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}$.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} b_n & x & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ b_2 & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x+b_1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (1) 将 A 写成一个上三角矩阵与一个下三角矩阵的乘积; (2) 求 A 的行列式.

4. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量组, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k, 使得向量组 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关.

5. 已知矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2=(2,1,2,1)^T,\alpha_5=(7,3,7,3)^T$. 又知方程组 $AX=\beta$ 的一个解为 $X=(1,1,-1,0,1)^T$, 这里 $\beta=(7,5,7,4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a,b 为何值时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX=\beta$ 的所有解; (4) 求所有矩阵 B, 使得 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5]B$.

6. 设 A_{ij} 是行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中 (i,j) 元的代数余子式. 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix}=Dy-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_ix_j$.

7. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W, B 的列空间为 V. 证明 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(AB)$ 当且仅当 $V\cap W=\{0\}$.

8.2 解答

1. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下 $n+1$ 个行列式: $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\cdots,$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 相加得到原行列式为 $1+\sum_{i=1}^n x_iy_i$.

2. “$\Rightarrow$”: 若 $x=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s=0\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0\Rightarrow x=0$.

“$\Leftarrow$”: 考虑 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s=0$, 这意味着 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}\Rightarrow\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0,\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_s\beta_s=0$. 由两组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r,\{\beta_j\}_{j=1}^s$ 各自内部的线性无关

性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0$, 因此整体也线性无关.

3. (1) 通过行变换 (倒数第二行加上倒数第一行的 x 倍, 倒数第三行加上倒数第二行的 x 倍, $\cdots$) 得到 $A=LU$, 其中

$$L=\begin{bmatrix}1&-x&0&\cdots&0&0\\0&1&-x&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-x\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n&0&0&\cdots&0&0\\x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}&-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x^2+b_1x+b_2&0&0&\cdots&-1&0\\x+b_1&0&0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}.$$

(2) $|A|=|L||U|=(-1)^{n-1}(x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)$.

4. 将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$, 并任意选择 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 行列式 $|(\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_n+k\beta_n)|$ 是一个关于 k 的至多 n 次多项式, 其等于零至多只有 n 个解 (令 $k\to\infty$ 知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关, 因此存在无穷多个实数 k.

5. (1) 容易得到 $\alpha_1-\alpha_3=(-2,1,-2,0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3=2\alpha_2=(4,2,4,2)^T$, $\alpha_1=(2,3,2,2)^T$, 从而 $\alpha_4=(8,6,8,3)$. 因此

$$A=\begin{bmatrix}2&2&4&8&7\\3&1&2&6&3\\2&2&4&8&7\\2&1&2&5&3\end{bmatrix},J=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考察各系数, 知当 $a=14,b\in\mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.

(3) 先求出 $AX=0$ 的解, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5)X=0$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1,3t_1-2t_2,t_2,-t_1,0)^T$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX=\beta$ 的通解是 $(t_1+1,3t_1-2t_2+1,t_2-1,-t_1,1)^T$.

(4) 容易求得 $B=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

6. 按最后一行展开, 得到 $\text{LHS}=Dy+\sum_{i=1}^n(-1)^{n+i+1}x_iD_i$, 其中 D_i 是把 D 中第 i 列删去, 最后一列补上 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 得到的行列式. 再按最后一列对所有 D_i 展开, 得到 $D_i=\sum_{j=1}^n(-1)^{n+j}(-1)^{i+j}A_{ij}x_j$, 直接代入得到 RHS.

7. 注意到 $\text{rank}(B)=\text{rank}(AB)\Leftrightarrow\text{Ker}(B)=\text{Ker}(AB)$.

"$\Rightarrow$": 考虑 $x\in V\cap W$, 则可设 $x=By$. 由于 $ABy=Ax=0$, 因此 $y\in\text{Ker}(AB)=\text{Ker}(B)\Rightarrow By=0\Rightarrow x=0$.

"$\Leftarrow$": 显然 $\text{rank}(AB)\le\text{rank}(B)$. 若 $\text{rank}(AB)<\text{rank}(B)$, 则 $\text{Ker}(AB)\neq\text{Ker}(B)$, 即 $\exists x\in\text{Ker}(AB)$ 但 $x\notin\text{Ker}(B)$, 此时 $Bx\neq0$, 但是 $Bx\in V\cap W$.

9 第 8 次习题课: 可逆矩阵

9.1 问题

1. n 阶方阵 $A,B,A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆并求其逆矩阵.

2. n 阶方阵 A,B 满足 $A+B=AB$, 证明 $AB=BA$.

3. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

4. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\&1&2&\cdots&n-1\\&&1&\cdots&n-2\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}$ 的逆.

5. A 是 n 阶方阵, 试根据 $\text{rank}(A)$ 的取值讨论 $\text{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是它的伴随矩阵.

6. 已知 $I_{m\times m}-A_{m\times n}B_{n\times m}$ 可逆, 证明 $I_{n\times n}-B_{n\times m}A_{m\times n}$ 也可逆并求其逆矩阵.

7. A 是 n 阶可逆矩阵, α,β 是 n 维列向量, 且矩阵 $A+\alpha\beta^T$ 可逆, 证明 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$.

8. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{bmatrix}$ 的逆, 其中 $a_i>0,\forall i=1,2,\cdots,n$.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 求 $(A^*)^*$.

10. 设 n 阶方阵 A 恰有 k 个 $n-1$ 阶子式等于 0, 其中 $1\le k\le n-1$. 证明 A 可逆.

11. 设 A,B 是 n 阶方阵, A^*,B^* 为对应的伴随矩阵, 试求 $2n$ 阶方阵 $M=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵.

12. A 是 n 阶方阵 $(n\ge 3)$, $A^3=O$, 证明矩阵 $M=\begin{bmatrix}I & A\\ A & I\end{bmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

9.2 解答

1. 由于 $[(A+B)^{-1}B](I+B^{-1}A)=I$, 因此 $(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=I\Rightarrow(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B=(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=I\Rightarrow(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.

2. $A+B=AB\Rightarrow(A-I)(B-I)=I\Rightarrow(B-I)(A-I)=I\Rightarrow BA=A+B=AB$.

3. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

4. 记 $J=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0&0\end{bmatrix}$, 则 $A=I+2J+\cdots+nJ^{n-1}$. 由于 $A(I-2J+J^2)=0$, 因此 $A^{-1}=I-2J+J^2$.

5. 当 $\mathrm{rank}(A)=n$ 时, 由于 $AA^*=|A|I$, 从而 A^* 可逆, 因此 $\mathrm{rank}(A^*)=n$. 当 $\mathrm{rank}(A)=n-1$ 时, 由于 $AA^*=0$, 且 $\dim(\mathrm{Ker}(A))=n-\mathrm{rank}(A)=1$, 又有 A 中存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 不全零, $\mathrm{rank}(A^*)=1$. 当 $\mathrm{rank}(A)\le n-2$ 时, A 中不存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 全零, 从而 $\mathrm{rank}(A^*)=0$.

6. $(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A)=I-BA+B(I-AB)^{-1}A-BAB(I-AB)^{-1}A=I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A=I$, 因此 $(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$.

7. 注意到 $A+\alpha\beta^T=A(I+A^{-1}\alpha\beta^T)$, 因此 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=(I+A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1}=(I-A^{-1}\alpha(1+\beta^T A^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$.

8. $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)(I_n+\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}\\ \frac{1}{a_2}\\ \vdots\\ \frac{1}{a_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\cdots&1\end{bmatrix})\Rightarrow A^{-1}=(I_n-(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}\\ \frac{1}{a_2}\\ \vdots\\ \frac{1}{a_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\cdots&1\end{bmatrix})\mathrm{diag}(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n})$.

9. 当 $n=2$ 时, 由伴随矩阵定义知 $(A^*)^*=A$. 当 $n>2$ 时, 若 A 可逆, 由 $A^*=|A|(A^*)^{-1}$ 知 $(A^*)^*=|A^*|A^{-1}=|A|^{n-1}|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$. 若 A 不可逆此结论也对, 因为 $\mathrm{rank}(A^*)=1$, A^* 的伴随矩阵全零.

10. 反证法. 若 $\mathrm{rank}(A)\le n-1$, 则由第 5 题结论知 $\mathrm{rank}(A^*)=1$. 任取某个 $A^*_{ij}=0$, 由于其秩为 1, 因此其第 i 行全零, 这与恰有 k 个子式为 0 矛盾.

11. 只需简单计算即可, $M^*=\begin{bmatrix}|B|A^* & O\\ O & |A|B^*\end{bmatrix}$.

12. 设 $P=\begin{bmatrix}I & O\\ -A & I\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}I & -A\\ O & I\end{bmatrix}$, 则 $PMQ=\begin{bmatrix}I & O\\ O & I-A^2\end{bmatrix}$. $A^3=O\Rightarrow(PMQ)^{-1}=\begin{bmatrix}I & O\\ O & I+A^2\end{bmatrix}\Rightarrow M^{-1}=Q\begin{bmatrix}I & O\\ O & I+A^2\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}I+A^2 & -A\\ -A & I+A^2\end{bmatrix}$.

10 第 9 次习题课: 矩阵的分块, 正交矩阵

10.1 问题

1. 证明对任意 n 阶可逆矩阵, 存在方阵 P, L, U 使得 $PA = LU$, 其中 P 是对换矩阵 (对换单位矩阵某两行所得矩阵) 的积, L 是对角元均为 1 的下三角矩阵, U 是上三角矩阵.

2. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.

3. 证明行列式为 1 的 n 阶方阵可以写成若干个行列式为 1 的初等矩阵的乘积.

4. 已知 $P = \begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix}$, 证明 P 可逆当且仅当 $I - A$ 可逆, 并利用 $(I - A)^{-1}$ 表出 P^{-1}.

5. A 是 n 阶方阵, 证明 $\operatorname{rank}(A - I) + \operatorname{rank}(A^2 + A + I) = n$ 当且仅当 $A^3 = I$.

6. A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $\operatorname{rank}(I - AB) + \operatorname{rank}(I + BA) = n$, 证明或否定: A 是可逆矩阵.

7. A, B, C 分别是 $m \times n, n \times s, s \times t$ 矩阵, 证明 $\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$.

8. A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $\operatorname{rank}(A + B) \geq \operatorname{rank}(A, B) + \operatorname{rank}(A^T, B^T) - \operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B)$.

9. A, B, C, D 都是 n 阶方阵, $AC = CA$, $AD = CB$, 且 A 可逆. 求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩.

10. 矩阵 $A_{m\times m}, B_{m\times n}, C_{n\times m}, D_{n\times n}$ 满足 A 和 $E := D - CA^{-1}B$ 可逆. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 也可逆并求其逆.

11. A, B, C, D 都是 n 阶方阵, 且 $AC = CA$, 证明或否定 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

12. $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 都是 n 阶方阵, 且 A_1, B_1 都是 r 阶方阵, $AB = I$. 证明 $|A||B_4| = |A_1|$.

13. 记 $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, 试证明 $A_\theta A_\omega = A_{\theta+\omega}, B_\theta B_\omega = A_{\theta-\omega}, A_\theta B_\omega = B_{\theta+\omega} = B_\omega A_{-\theta}$, 并解释 A_θ, B_θ 作为 $\mathbb{R}^2$ 上线性变换的几何含义.

14. 设 $\alpha_1 = (1,0,1,0)^T, \alpha_2 = (1,1,0,1)^T, \alpha_3 = (0,1,0,2)^T$. (1) 求 α_3 在 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 上的正交投影; (2) 求 α_3 到 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的距离; (3) 求到 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的正交投影算子 (用矩阵表示).

15. 将向量 $\alpha_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^T$ 扩充成 $\mathbb{R}^3$ 中的一组标准正交基.

16. U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 是任意两个向量. 证明 $\operatorname{dist}(\alpha + U, \beta + V) = \operatorname{dist}(\alpha - \beta, U + V)$.

10.2 解答

1. 由于 A 可逆, 因此第一列必至少存在一个非零元 a_{i1}. 将第 1 行与第 i 行互换使得新矩阵 $(1,1)$ 元非零, 再把第一列的 $(i,1)$ 元都化成零, $i = 2, 3, \cdots, n$. 这意味着 $Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$, 其中 P_{i1} 是对换矩阵, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}$. 利用归纳法, 假设存在 $P_{n-1}A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & P_{n-1}A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

等式右边已经是一个对角元均为 1 的下三角矩阵乘一个上三角矩阵, 因此观察等式左边. 注意到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$ 是对换矩阵的积, 而 Q_1 是对角元均为 1 的下三角矩阵, 要是能把这俩矩阵换个位置就好了. 计算知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}\alpha & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

这样就可以写出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} P_{i1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1}\alpha & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

于是令 $P=\begin{bmatrix}1&0\\0&P_{n-1}\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}1&0\\-P_{n-1}\alpha&L_{n-1}\end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix}a'_{11}&\beta\\0&U_{n-1}\end{bmatrix}$ 即可. 显然 $n=1$ 是平凡的, 因此任意 n 都成立.

2. 先验证初等矩阵 $P(j,i(1))$, 即 $AP(j,i(1))=P(j,i(1))A$, 两边同时减去矩阵 A 得到 $AE_{ij}=E_{ij}A\Rightarrow a_{ii}=a_{jj}, a_{ij}=0, \forall i\neq j$, 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

3. 只需验证 A 可经一系列消法变换 (即不经过第三类初等矩阵 $P(i(c))$) 化为单位矩阵. 利用归纳法, 由于 A 可逆, 总可通过消法变换化得到 $a_{11}=1$, 从而再通过消法变换化为 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&A_1\end{bmatrix}$, $n-1$ 阶方阵 A_1 的行列式为 1, 从而可消法变换化为单位矩阵 I_{n-1}, 因此 A 也可通过消法变换化为单位矩阵 I_n. 显然 $n=1$ 是平凡的.

4. 利用分块初等变换得 $\begin{bmatrix}A&I\\I&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&O\\-I&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-I&I\\O&I\end{bmatrix}$, 因此 $|P|=|A-I|$, 两者可逆性相互等价. 另一方面, 由上式两边求逆得 $P^{-1}=\begin{bmatrix}I&O\\-I&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-I&I\\O&I\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}I&O\\-I&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-(I-A)^{-1}&(I-A)^{-1}\\O&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(I-A)^{-1}&(I-A)^{-1}\\(I-A)^{-1}&I-(I-A)^{-1}\end{bmatrix}$.

5. 由裴蜀定理, 存在多项式 f,g 使得 $f(x)(x-1)+g(x)(x^2+x+1)=1$, 即 $f(A)(A-I)+g(A)(A^2+A+I)=I$. 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix}A-I&O\\O&A^2+A+I\end{bmatrix}\xrightarrow{列}\begin{bmatrix}A-I&f(A)(A-I)\\O&A^2+A+I\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}A-I&I\\O&A^2+A+I\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}A-I&I\\I-A^3&O\end{bmatrix}\xrightarrow{列}\begin{bmatrix}O&I\\A^3-I&O\end{bmatrix}.$$

从而 $\mathrm{rank}(A-I)+\mathrm{rank}(A^2+A+I)=n+\mathrm{rank}(A^3-I)$, 因此原命题成立.

6. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix}I&O\\-B&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&-A\\B&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&A\\O&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&O\\O&I+BA\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}I&A\\O&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&-A\\B&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&O\\-B&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I+AB&O\\O&I\end{bmatrix},$$

从而知 $\mathrm{rank}(I+BA)=\mathrm{rank}(I+AB)$. 因此原条件等价于 $\mathrm{rank}(I-AB)+\mathrm{rank}(I+AB)=n$, 由上一小题的类似结论知 $(I-AB)(I+AB)=0\Rightarrow(AB)^2=I$, 因此 A 可逆.

7. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix}ABC&O\\O&B\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}ABC&AB\\O&B\end{bmatrix}\xrightarrow{列}\begin{bmatrix}O&AB\\BC&B\end{bmatrix},$$

从而知 $\mathrm{rank}(ABC)+\mathrm{rank}(B)\geq\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC)$.

8. 令 $P=(I_m,I_m), M=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}I_n\\I_n\end{pmatrix}$, 然后代入第 7 题的不等式. 只需注意 $\mathrm{rank}(A^T,B^T)=\mathrm{rank}(A^T,B^T)^T$.

9. 利用分块初等变换, 得 $\begin{pmatrix}I&O\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A^{-1}B\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$. 由于 $\mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)=\mathrm{rank}(A(D-CA^{-1}B))=0$, 因此 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)=n$.

10. $\begin{pmatrix}A&B&I&O\\C&D&O&I\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}A&B&I&O\\O&D-CA^{-1}B&-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}I&A^{-1}B&A^{-1}&O\\O&E&-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\xrightarrow{行}$
$\begin{pmatrix}I&O&A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1}&-A^{-1}BE^{-1}\\O&E&-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}I&O&A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1}&-A^{-1}BE^{-1}\\O&I&-E^{-1}CA^{-1}&E^{-1}\end{pmatrix}\Rightarrow$
$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1}&-A^{-1}BE^{-1}\\-E^{-1}CA^{-1}&E^{-1}\end{pmatrix}$.

11. 若 A 可逆, 则 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\overset{行}{=}\begin{vmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A(D-CA^{-1}B)|=|AD-CB|$. 若 A 不可逆, 构造 $A(t)=A+tI$, 从而存在无穷多个 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $A(t)$ 可逆, 且对这些 t 成立 $\begin{vmatrix}A(t)&B\\C&D\end{vmatrix}=|A(t)D-CB|$. 两边都是关于 t 的多项式, 因此对于所有 $t\in\mathbb{R}$ 等式都成立, 特别地对于 $t=0$ 也成立.

12. 容易计算出 $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&B_2\\O&B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&O\\A_3&I_{n-r}\end{pmatrix}$, 两边同时取行列式即可.

13. A_θ 是逆时针旋转 θ 角, B_θ 是按逆时针方向的 $\frac{\theta}{2}$ 角做镜面反射. 有了几何含义, 验证这些矩阵乘法也就很简单了.
14. 容易求出 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 的一组标准正交基是 $\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ 和 $\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}})$. (1) 投影是 $=(\alpha_3,\beta_1)\beta_1+(\alpha_3,\beta_2)\beta_2=(\frac{3}{5},\frac{6}{5},-\frac{3}{5},\frac{6}{5})$. (2) 距离是 $|(0,1,0,2)-(\frac{3}{5},\frac{6}{5},-\frac{3}{5},\frac{6}{5})|=|(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5})|=\frac{\sqrt{35}}{5}$. (3) 任意向量 $\alpha=(x,y,z,w)$, 其投影是 $(\alpha,\beta_1)\beta_1+(\alpha,\beta_2)\beta_2=(\frac{3x+y+2z+w}{5},\frac{x+2y-z+2w}{5},\frac{2x-y+3z-w}{5},\frac{x+2y-z+2w}{5})$, 因此算子是 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1&2&1\\1&2&-1&2\\2&-1&3&-1\\1&2&-1&2\end{pmatrix}$.
15. (答案不唯一) $\alpha_2=\frac{1}{3}(1,-2,2)^T,\alpha_3=\frac{1}{3}(2,-1,-2)^T$.
16. $\mathrm{dist}(\alpha+U,\beta+V)=\min_{\gamma\in U,\delta\in V}\|\alpha+\gamma-\beta-\delta\|=\min_{\gamma\in U,\delta\in V}\|(\alpha-\beta)-(\delta-\gamma)\|_2=\mathrm{dist}(\alpha-\beta,U+V)$.

11 第 10 次习题课: 线性映射

11.1 问题

1. (1) $ABCD$ 是中心为原点、边与坐标轴平行的单位正方形. 求所有 $\mathbb{R}^2$ 上所有保持该正方形不变的线性变换, 写出它们的矩阵, 并证明它们可被两个变换生成. (2) 试求出保持中心为原点的正十二面体不变的线性变换的个数.
2. A 是从 K^n 到 K^m 的线性映射, 将 $\mathrm{Ker}A$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 扩充成 K^n 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$. (1) 证明 $\beta_1=A\alpha_{s+1},\cdots,\beta_r=A\alpha_n$ 线性无关 (其中 $r=n-s$), 并构成 $\mathrm{Im}A$ 的一组基; (2) 将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 扩充成 K^m 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_m$, 并证明 $A(\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$; (3) 矩阵 $A=(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 与 $\begin{pmatrix}3&6&1&3&5\\2&4&2&2&6\\2&4&1&2&4\end{pmatrix}$ 行向量组等价, 求可逆矩阵 P,Q 使得 $AP=Q\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.
3. P 是线性空间 V 上的幂等变换 (即 $P^2=P$), 证明 $P=\mathrm{Ker}P\oplus\mathrm{Im}P$, 且 P 是沿 $\mathrm{Ker}P$ 向 $\mathrm{Im}P$ 的投影, $I-P$ 是沿 $\mathrm{Im}P$ 向 $\mathrm{Ker}P$ 的投影.
4. P 是实线性空间上的幂等矩阵, 证明 A 是正交投影当且仅当 A 是对称矩阵.
5. $\beta\in\mathbb{R}^n$ 是单位向量 ($\|\beta\|_2=1$), $P=I-\beta\beta^T$, $A=I-2\beta\beta^T$. (1) 证明 P 是幂等对称矩阵, 并写出第 3 题中的 (正交) 直和分解; (2) A 是实对称正交矩阵, 且满足 $A^2=I$; 计算 $\det(A)$, 并探究 A 的几何性质.
6. A_1,A_2,A_3,A_4 是 n 维线性空间上的线性变换, 它们之间任意两个均可交换, 且 $A_1A_2+A_3A_4=I$. 证明 $\mathrm{Ker}(A_1A_3)=\mathrm{Ker}A_1\oplus\mathrm{Ker}A_3$.
7. A,B 是 n 维线性空间上的线性变换, $AB=BA$, 证明或否定 $\mathrm{rank}A^2+\mathrm{rank}B^2\geq 2\mathrm{rank}(AB)$.
8. A,B 是幂等变换, 证明 $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}B$ 当且仅当 $AB=A,BA=B$.
9. A,B 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $A^2=B^2=O$, $AB+BA=I$. (1) 证明 $\mathrm{Ker}A=A(\mathrm{Ker}B),\mathrm{Ker}B=B(\mathrm{Ker}A)$, 且 $V=\mathrm{Ker}A\oplus\mathrm{Ker}B$; (2) 是否存在 $n=2023$ 维且满足上述约束关系的线性变换; (3) 若 $\dim V=2$, 证明 A,B 在某组基下的矩阵可以是 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.
10. V_1,V_2,V_3 都是数域 F 上的有限维线性空间, $\varphi:V_1\to V_2$, $\psi:V_1\to V_3$ 是两个线性映射. 证明 ψ 可以写成 $\psi=\sigma\varphi$, 其中 $\sigma:V_2\to V_3$ 是线性映射的充要条件是 $\mathrm{Ker}\varphi\subset\mathrm{Ker}\psi$.
11. A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明存在 $r\in\mathbb{N}$ 使得对于 $\forall s\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}A^r=\mathrm{Ker}A^{r+s}$.

11.2 解答

1. (1) 只需确定基的像. e_1 可以有 4 种选择, e_2 在 e_1 的基础上有 2 种选择, 因此有 8 种: $\begin{bmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\pm1\\\pm1&0\end{bmatrix}$. 它们可由逆时针旋转 90° 和关于 y 轴的反射这两个变换生成, 即 $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$.
(2) 只需确定其中任意三个点 (对应的向量) 的像, 这里我们考虑共面的某三个点. 因为有 20 个顶点, 每个顶点又有 3 个邻结点, 和这 2 个点具有原始度量关系的点又有 2 个, 因此有 $20\times3\times2=120$ 个线性变换.

2. (1) $k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r=A(k_1\alpha_{s+1}+\cdots+k_r\alpha_n)=0\Rightarrow k_1\alpha_{s+1}+\cdots+k_r\alpha_n\in\mathrm{Ker}A\Rightarrow k_1\alpha_{s+1}+\cdots+k_r\alpha_n=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_r=0$, 因此线性无关. $\forall\alpha\in\mathrm{Im}A,\alpha=A(m_1\alpha_1+\cdots+m_n\alpha_n)=m_{s+1}\beta_1+\cdots+m_n\beta_r$, 因此是一组基.
(2) 显然.
(3) 求出 $\mathrm{Ker}A$ 的一组基是 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, 因此可以求出 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$, $Q=(\gamma_1,\gamma_3,\gamma_5,$线性无关的$)$.
3. $P|_{\mathrm{Im}P}=\mathrm{id}$, 因为 $\forall\alpha=P\beta\in\mathrm{Im}P$ 有 $P\alpha=P^2\beta=P\beta=\alpha$. 其次 $\mathrm{Ker}P\cap\mathrm{Im}P=\{0\}$, 因为 $\alpha=P\beta\in\mathrm{Ker}P\cap\mathrm{Im}P$ 有 $0=P\alpha=P^2\beta=P\beta=\alpha$. 又因为 $\forall\alpha\in V$ 有 $\alpha=(I-P)\alpha+P\alpha\in\mathrm{Ker}P+\mathrm{Im}P$, 因此有直和分解. 同理知 $I-P$ 的性质, 因为它也是幂等变换, 且 $\mathrm{Ker}(I-P)=\mathrm{Im}P$, $\mathrm{Im}(I-P)=\mathrm{Ker}P$.
4. 从上一问我们已知 A 是投影. "$\Rightarrow$": A 是正交投影 $\Rightarrow\forall\alpha,\beta,\langle(I-A)\alpha,A\beta\rangle=0\Rightarrow\forall\alpha,\beta,\alpha^T(I-A^T)A\beta=0\Rightarrow A=A^TA$. 同理有 $\forall\alpha,\beta,\langle A\alpha,(I-A)\beta\rangle=0\Rightarrow A^T=A^TA$. 因此 $A=A^T$. "$\Leftarrow$": $\forall\alpha\in\mathrm{Ker}A,\beta=A\gamma\in\mathrm{Im}A\Rightarrow\langle\alpha,A\gamma\rangle=\langle A^T\alpha,\gamma\rangle=\langle A\alpha,\gamma\rangle=0$. 因此 $\mathrm{Ker}A\perp\mathrm{Im}A$.
5. (1) $P^2=(I-\beta\beta^T)(I-\beta\beta^T)=I-2\beta\beta^T+\beta(\beta^T\beta)\beta^T=I-\beta\beta^T=P$, 且对称性显然. 直和分解是 $\mathbb{R}=\mathrm{Ker}P\oplus\mathrm{Im}P=\langle\beta\rangle+\langle\beta\rangle^\perp$. (2) 对称性显然, 且 $A^TA=A^2=I-4\beta\beta^T+4\beta\beta^T\beta\beta^T=1$, 因此正交. $|A|=|I-2\beta\beta^T|=1-2\beta^T\beta=-1$. 注意到 P 是在 $\langle\beta\rangle^\perp$ 上的投影, 因此 A 是关于 $\langle\beta\rangle^\perp$ 作镜面反射.
6. 任取 $\alpha\in\mathrm{Ker}(A_1A_3)$, 有 $\alpha=A_1A_2\alpha+A_3A_4\alpha\in\mathrm{Ker}A_3+\mathrm{Ker}A_1$; 反之任取 $\beta\in\mathrm{Ker}A_1,\gamma\in\mathrm{Ker}A_3$, 有 $A_1A_3(\beta+\gamma)=0\Rightarrow\beta+\gamma\in\mathrm{Ker}(A_1A_3)$. 因此 $\mathrm{Ker}A_1+\mathrm{Ker}A_3=\mathrm{Ker}(A_1A_3)$. 又由于 $\forall\delta\in\mathrm{Ker}A_1\cap\mathrm{Ker}A_3\Rightarrow\delta=A_1A_2\delta+A_3A_4\delta=0$, 因此是直和.
7. 结论不对. 可取 $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}J&\\&J\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}J&I\\O&J\end{pmatrix}$. $A^2=O,B^2=\begin{pmatrix}O&2J\\O&O\end{pmatrix}$, $AB=BA=\begin{pmatrix}O&J\\O&O\end{pmatrix}$.
8. "$\Rightarrow$": $\forall\alpha$, $A(A\alpha-\alpha)=0\Rightarrow B(A\alpha-\alpha)=0\Rightarrow BA=B$. 同理 $AB=A$.
"$\Leftarrow$": $\forall\alpha\in\mathrm{Ker}A$, $B\alpha=BA\alpha=0\Rightarrow\mathrm{Ker}A\subset\mathrm{Ker}B$. 同理 $\mathrm{Ker}B\subset\mathrm{Ker}A$.
9. (1) $\forall\alpha=A\beta\in A(\mathrm{Ker}B)$, 有 $A\alpha=A^2\beta=O$; $\forall\gamma\in\mathrm{Ker}A$, 有 $\gamma=AB\gamma+BA\gamma=AB\gamma$, 且注意到 $B\gamma\in\mathrm{Ker}(B)$. 因此 $\mathrm{Ker}A=A(\mathrm{Ker}B)$, 同理 $\mathrm{Ker}B=B(\mathrm{Ker}A)$. 又因为 $\forall\delta\in V$ 有 $\delta=AB\delta+BA\delta=A(\mathrm{Ker}B)+B(\mathrm{Ker}A)=\mathrm{Ker}A+\mathrm{Ker}B$, 且 $\theta\in\mathrm{Ker}A\cap\mathrm{Ker}B\Rightarrow\theta=AB\theta+BA\theta=0$, 因此 $V=\mathrm{Ker}A\oplus\mathrm{Ker}B$.
(2) 注意到 $\mathrm{Ker}A=A(\mathrm{Ker}B)\subset\mathrm{Im}A$, 且 $\dim(\mathrm{Ker}A)+\dim(\mathrm{Im}A)=n$, 因此 $\dim(\mathrm{Ker}A)\le\frac{n}{2}$, 同理 $\dim(\mathrm{Ker}B)\le\frac{n}{2}$. 由直和关系知 $\dim(\mathrm{Ker}A)+\dim(\mathrm{Ker}B)=n$, 因此 n 只能为偶数.
(3) 由上一问论证过程知 $\dim(\mathrm{Ker}A)=1$. 取 $\mathrm{Ker}A$ 的一组基 α_1, 并考虑 $\alpha_2=B\alpha_1\in\mathrm{Ker}B$. 由于 $\mathrm{Ker}A\cap\mathrm{Ker}B=\{0\}$, 因此 α_1,α_2 线性无关. 在这组基 α_1,α_2 下, A,B 有题设的矩阵表示 $(A\alpha_1=0,A\alpha_2=AB\alpha_1=\alpha_1-BA\alpha_1=\alpha_1,B\alpha_1=\alpha_2,B\alpha_2=B^2\alpha_1=0)$.
10. 必要性是显然的, 下面证明充分性. 取 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, 并扩充成 $\mathrm{Ker}\psi$ 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$, 又再扩充成 V_1 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$. 显然 $\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_s),\varphi(\gamma_1),\cdots,\varphi(\gamma_t)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基, 并又可扩充成 V_2 的一组基 $\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_s),\varphi(\gamma_1),\cdots,\varphi(\gamma_t),\delta_1,\cdots,\delta_l$. 现在, 对于任意 $\beta=\sum_{i=1}^s a_i\varphi(\beta_i)+\sum_{j=1}^t b_j\varphi(\gamma_j)+\sum_{k=1}^l c_k\delta_k\in V_2$, 只需定义 $\sigma(\beta)=\sum_{j=1}^t b_j\psi(\gamma_j)$ 即可.
11. 先证明存在 $r\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{Ker}A^r=\mathrm{Ker}A^{r+1}$. 显然有无穷递升链 $\dim(\mathrm{Ker}A)\le\dim(\mathrm{Ker}A^2)\le\dim(\mathrm{Ker}A^3)\le\cdots$, 注意到这条链有上界 n, 因此必然存在 r 使得 $\dim(\mathrm{Ker}A^r)=\dim(\mathrm{Ker}A^{r+1})$, 这意味着 $\mathrm{Ker}A^r=\mathrm{Ker}A^{r+1}$. 现在开始推广到 $r+s$: 由于 $A^{r+2}\alpha=0\Leftrightarrow A^{r+1}(A\alpha)=0\Leftrightarrow A^r(A\alpha)=0\Leftrightarrow A^{r+1}\alpha=0$, 以此类推知 $\mathrm{Ker}A^{r+s}=\mathrm{Ker}A^r,\forall s\in\mathbb{N}$.

12 第 11 次习题课: 特征值, 特征向量

12.1 问题

1. 矩阵 $\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}$ 诱导了 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 A. (1) 写出 A 在基 $\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,-1)^T$ 下的矩阵; (2) 求在变换 A 下保持不动的直线; (3) $\alpha=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2$, 求 $A\alpha$ 在基 α_1,α_2 下的坐标.

2. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量. 你能求出任意一个三阶矩阵的特征值和特征向量吗?
3. 3 阶矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 对应的特征向量是 $(1,0,0)^T,(0,1,0)^T,(-1,0,1)^T$, 求 A^m. 你能推广到 e^A 吗?
4. A,B 是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵. 证明 AB 与 BA 有相同的非零特征值, 且这些特征值的几何重数和代数重数也相同.
5. 利用矩阵方法求出斐波拉契数列的通项公式.
6. A 是第一类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda=1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda=1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 证明 $\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 仍是一组标准正交基. (3) 已知 $A\alpha_2=(\cos\theta)\alpha_2+(\sin\theta)\alpha_3$, 求 $A\alpha_3$. (4) 探究 A 的几何性质.
7. A 是第二类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda=-1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda=-1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 证明 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$. (3) 探究 A 的几何性质.
8. A,B 是二阶实方阵, 且满足 $A^2+B^2=O$. 证明 $\det(AB-BA)\le 0$.
9. 求 n 阶循环矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix}$ 的行列式.
10. A,B,C 分别是 $n\times n,m\times m,n\times m$ 矩阵, 其中 $n>m$, $\text{rank}(C)=m$, 且 $AC=CB$. 证明 $|\lambda I_m-B|$ 整除 $|\lambda I_n-A|$.
11. A,B 分别是 m,n 阶方阵, 且无公共特征值. 求解矩阵方程 $AX=XB$(你可以设定一些未知数来表示答案).
12. σ,δ,τ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\tau\delta=0$ 且 $\text{rank}(\sigma)<\text{rank}(\tau)$. 证明 σ 和 δ 存在公共特征向量.
13. 现有 n 维线性空间 V 和线性变换 A. 证明特征值的代数重数大于等于几何重数, 并举例说明等号可以不取到.
14. n 维空间 V 上的线性变换 A 有 $n+1$ 个特征向量, 且其中任意 n 个线性无关. 求所有可能的 A 构成的集合.

12.2 解答

1. (1) 矩阵是 $(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}4&0\\1&1\end{pmatrix}$. (2) 保持不动的直线即特征向量, 先解 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda=1,4$, 然后求得特征向量分别是 $\beta_1=(1,-1)^T,\beta_2=(2,1)^T$, 即这两个向量所对应的直线保持不变. (3) 根据 (1), 坐标为 $(4y_1,y_1+y_2)$.
2. 先解 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda=1$(重根), 10, 对应的特征向量分别是 $(2,-1,0)^T,(2,0,1)^T,(1,2,-2)^T$. 一元三次实方程在实数范围内必有解, 剩下两个解要么都是实数要么是共轭复数.
3. $A^m=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&\\&\lambda_2^m&\\&&\lambda_3^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^m&0&\lambda_1^m-\lambda_3^m\\0&\lambda_2^m&0\\0&0&\lambda_3^m\end{pmatrix}$.
4. WLOG $m\ge n$. 由 $|I-AB|=|I-BA|$ 知 $|\lambda I-AB|=\lambda^m|I-\lambda^{-1}AB|=\lambda^m|I-\lambda^{-1}BA|=\lambda^{m-n}|\lambda I-BA|$, 因此非零特征值的代数重数相同. 另一方面, 若 $AB\mu=\lambda\mu$ 对于某个特征值 λ 有解空间 $\langle\mu_1,\cdots,\mu_d\rangle$(基), 则 $\langle B\mu_1,\cdots,B\mu_d\rangle$ 属于 $BAX=\lambda X$ 的解空间, 且它们线性无关 ($k_1B\mu_1+\cdots+k_dB\mu_d=0\Rightarrow k_1\mu_1+\cdots+k_d\mu_d\in\text{Ker}B\Rightarrow\lambda(k_1\mu_1+\cdots+k_d\mu_d)=AB(k_1\mu_1+\cdots+k_d\mu_d)=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_d=0$). 同理反过来也成立, 因此它们的解空间维数相同, 即非零特征值的几何重数相同.
5. 先写出递推公式 $\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\end{pmatrix}$, 做特征值分解 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&\\&\frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}^{-1}$, 因此 $\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_0\end{pmatrix}$, 利用特征值分解可推导 $a_n=A(\frac{1+\sqrt5}{2})^n+B(\frac{1-\sqrt5}{2})^n$. 代入 $n=0,1$ 知 $A=\frac{1}{\sqrt5},B=-\frac{1}{\sqrt5}$, 因此 $a_n=\frac{1}{\sqrt5}(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-\frac{1}{\sqrt5}(\frac{1-\sqrt5}{2})^n$.
6. (1) $|I-A|=-|A-I|=-|A||I-A^{-1}|=-|I-A^T|=-|I-A|\Rightarrow|I-A|=0$.
(2) 正交矩阵诱导等距同构, 因此 $\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$(即 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$) 仍是标准正交基.

(3) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(1,0,0)^T,(0,\cos\theta,\sin\theta)^T$, 去补全第三列. 显然是 $(0,-\sin\theta,\cos\theta)^T$, 因此 $A\alpha_3=-(\sin\theta)\alpha_2+(\cos\theta)\alpha_3$.

(4) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角.

7. (1) $|I+A|=|A||I+A^{-1}|=-|I+A^T|=-|I+A|\Rightarrow|-I-A|=0$.

(2) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(-1,0,0)^T,(0,\cos\theta,\sin\theta)^T$, 去补全第三列. 过程与 6(3) 类似.

(3) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角, 再关于平面 $\langle\alpha_1\rangle^\perp$ 作镜面反射.

8. 注意到 $(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)=A^2+B^2-\mathrm{i}(AB-BA)$, 因此 $\det(AB-BA)=-\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)$. 若 $A+\mathrm{i}B$ 有特征值 λ_1,λ_2, 则 $A-\mathrm{i}\mathrm{B}$ 有特征值 $\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2}$(两边取共轭), 从而 $-\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)=-\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_1\lambda_2}=-|\lambda_1\lambda_2|^2\le 0$.

9. 记 $J=\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$, 则 $A=a_1I+a_2J+a_3J^2+\cdots+a_nJ^{n-1}$. 注意到 J 的特征多项式是 λ^n-1, 因此其特征值为 $w_k=e^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$, 从而 A 的特征值是 $\sum_{i=1}^n a_iw_k^{i-1}$, 这意味着 $|A|=\prod_{k=1}^n(\sum_{i=1}^n a_iw_k^{i-1})$.

10. 由于 C 列满秩, 因此存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $C=P\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}$, 从而 $AC=CB$ 可写为 $(P^{-1}AP)P^{-1}C=P^{-1}CB$. 对 $P^{-1}AP$ 作分块 $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 m 阶方阵, 代入上式知 $A_1=B,A_3=O$. 于是 $|\lambda I_n-A|=|\lambda I_n-P^{-1}AP|=\begin{vmatrix}\lambda I_m-B&-A_2\\O&\lambda I_{n-m}-A_4\end{vmatrix}=|\lambda I_m-B||\lambda I_{n-m}-A_4|$, 此即整除关系.

11. 方程只有零解. 假设存在 $AC=CB$, 并且 $\mathrm{rank}(C)=r\ge 1$. 则存在 m,n 阶可逆矩阵 P,Q 使得 $PCQ=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$. 由 $AC=CB$ 知 $(PAP^{-1})(PCQ)=(PCQ)(Q^{-1}BQ)$, 并作分块 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}$, 代入计算得到 $A_1=B_1,B_2=O,A_3=O$. 因此 A,B 的特征多项式分别为 $|\lambda I_m-A|=|\lambda I_m-PAP^{-1}|=|\lambda I_r-A_1||\lambda I_{m-r}-A_4|,|\lambda I_n-B|=|\lambda I_n-Q^{-1}BQ|=|\lambda I_r-A_1||\lambda I_{n-r}-B_4|$. 这与无公共特征值矛盾.

12. 由题设知 $\mathrm{Im}(\delta)\subset\mathrm{Ker}(\tau)$, 因此 $\mathrm{rank}(\delta)\le n-\mathrm{rank}(\tau)$, 从而 $\mathrm{rank}(\delta)+\mathrm{rank}(\sigma)<n,\dim(\mathrm{Ker}(\delta))+\dim(\mathrm{Ker}(\sigma))>n$, 故 $\dim(\mathrm{Ker}(\delta)\cap\mathrm{Ker}(\sigma))>0$. 取 $\xi\in\mathrm{Ker}(\delta)\cap\mathrm{Ker}(\sigma)$, 这就是它们对应于特征值为 0 的公共特征向量.

13. 设 $\dim V_{\lambda_0}=r$, 并取其一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, 然后扩充成 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 则 A 在这组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix}\lambda_0I_r&B\\O&C\end{pmatrix}$, 从而 $|\lambda I-A|=|(\lambda-\lambda_0)I_r||\lambda I_{n-r}-C|=(\lambda-\lambda_0)^r|\lambda I_{n-r}-C|$, 这表明其代数重数至少是 r. 对于矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\lambda=0$ 是其代数二重特征值, 但几何重数是 1.

14. A 只能是数乘变换. 考虑特征向量 $\eta_0,\cdots,\eta_n$ 对应于特征值 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$. 考虑 $\eta_0=a_1\eta_1+\cdots+a_n\eta_n$, 显然 $a_1,\cdots,a_n$ 均不为 0(否则剔除它对应的 η_i 后剩余的 n 个向量线性相关). 两边同时左乘 A 知 $a_1(\lambda_1-\lambda_0)\eta_1+\cdots+a_n(\lambda_n-\lambda_0)\eta_n=0\Rightarrow a_1(\lambda_1-\lambda_0)=\cdots=a_n(\lambda_n-\lambda_0)=0\Rightarrow\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n$. 这表明其是数乘变换.

13 第 12 次习题课: 矩阵的相似与对角化

13.1 问题

1. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&-2&2\\4&2&1\end{bmatrix}$, 找到正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $A=PDP^T$.

2. 分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}$ 可对角化, 其中 A,B 是方阵. 问是否有 A,B 都可对角化?

3. 方阵 A,B 可对角化，问是否有 AB 可对角化? 若加上 A,B 可交换条件呢?

4. 证明: (1) (Schur 引理) 在复数域上, 任何方阵 A 都相似于上三角矩阵; (2) 若矩阵 A,B 可交换, 则 A,B 有公共的复特征向量; (3) 若矩阵 A,B 可交换, 则存在可逆复矩阵 U 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同为上三角矩阵.

5. $A=\begin{bmatrix}A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$ 是分块上三角矩阵, 对角块为 n_i 阶上三角矩阵 $A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_i & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix}$, 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异. 证明 A 可对角化当且仅当 $A_i=\lambda_i I_{n_i}$.

6. (Roth 定理)$A_{m\times m},B_{n\times n},C_{m\times n}$. 证明: 若存在 $m\times n$ 矩阵 X 使得 $AX-XB=C$, 则矩阵 $\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$ 相似. 该命题的逆命题是否也成立?

7. A,B 是 n 阶复矩阵, $\operatorname{rank}(AB-BA)\le 1$, 证明 A,B 可同时上三角化.

【编者注】与第 4(3) 题相比, 本题条件有所放松 (秩要求从 0 放宽到 1).

8. n 阶实矩阵 A,B 在复数域上相似, 问它们是否在实数域上相似.

9. $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, $A^2=B^2=I, AB+BA=O$. 证明存在可逆矩阵 T 使得 $TAT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, TBT^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

10. n 维向量 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,\cdots,b_n)^T$, $A=\alpha\beta^T$, 且 $a_1b_1\neq 0$. 证明 A 可对角化的充要条件是 $\alpha^T\beta\neq 0$.

11. 考虑数域 F 上的 n 阶方阵构成的线性空间 $M_n(F)$. 定义线性运算 $\sigma(A)=A^T$, 求出它的特征值和对应的特征子空间, 并证明它可以对角化.

12. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}$. 证明 $\mathbb{R}^n$ 不能分解成 A 的两个非平凡不变子空间的直和, 并求 A 的所有不变子空间.

13. 集合 S 由一些可对角化的 n 阶方阵构成, 且其中任意两个矩阵都可交换. 问是否有 S 中所有矩阵都可同时对角化.

【编者注】本题是第 3 题的一个推广.

14. n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 证明 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{tr}(A)$.

15. A,B,M 是 n 阶实方阵, $AM=MB$, 且 A,B 具有相同的特征多项式. 证明对于任意 n 阶实方阵 X, $\det(A-XM)=\det(B-XM)$.

13.2 解答

1. $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda=-3$(重根),6, 对应的一组标准正交特征向量是 $(\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5},0)^T,(\frac{4\sqrt5}{15},\frac{2\sqrt5}{15},-\frac{\sqrt5}{3})^T,(\frac23,\frac13,\frac23)^T$. 因此 $D=\operatorname{diag}(-3,-3,6),P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{4\sqrt5}{15} & \frac23\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2\sqrt5}{15} & \frac13\\ 0 & -\frac{\sqrt5}{3} & \frac23\end{bmatrix}$.

2. 由题意, 存在可逆分块矩阵 $U=\begin{bmatrix}U_1 & U_2\\ U_3 & U_4\end{bmatrix}$ 使得 $A\begin{bmatrix}U_1 & U_2\\ U_3 & U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1 & U_2\\ U_3 & U_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1 & O\\ O & D_2\end{bmatrix}$, 其中 D_1,D_2 是对角矩阵. 这得到 $BU_3=U_3D_1,BU_4=U_4D_2$. 取一个 $[U_3,U_4]$ 的列极大线性无关组知 B 可对角化. 对于 A, 注意到只需证明 A^T 可对角化, 对原矩阵取转置然后类似证明即可.

3. (1) 有反例 $A=\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) 可以对角化. 不妨设 A 是对角矩阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1I_1,\cdots,\lambda_sI_s)$, 并将 B 按照这种格式分块 $\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{ss}\end{bmatrix}$, 计算 $AB=BA$ 知 $B_{ij}=0,\forall i\neq j$. 由第二题结论知 B 可对角化 $\Rightarrow$ 每个 B_{ii} 均可对角化, 因此 AB 可对角化.

【编者注】本题也说明了 A,B 可同时对角化. 因为可将 B_{ii} 对角化时对应的基矩阵 U_{ii} 按对角线拼接成大矩阵 U, 在此矩阵对应的基下 A,B 都是对角阵.

4. (1) 对矩阵阶数用数学归纳法. 考虑 A 的某个特征值 λ_1 对应的单位特征向量 α_1, 扩充成一组标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 记 $U_1=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$. 则 $A=U_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & C_1\\ 0 & A_1\end{bmatrix}U_1^{-1}$. 由归纳假设 $A_1=U_2B_1U_2^{-1}$, 其中 B_1 上三角, U_2 正交, 因此

$$A=U_1\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & U_2\end{bmatrix}}_{\text{正交}}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & C_1U_1\\ 0 & B_1\end{bmatrix}}_{\text{上三角}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & U_2^{-1}\end{bmatrix}U_1^{-1}}_{\text{正交}^{-1}}.$$

(2) 记 A 对应于特征值 λ 的特征子空间为 V_λ. $\forall\alpha\in V_\lambda$, $AB\alpha=BA\alpha=\lambda B\alpha\Rightarrow B\alpha$ 也是 A 属于 λ 的特征向量 $\Rightarrow V_\lambda$ 是 B 的不变子空间. 从而只需取 $B|_{V_\lambda}$ 的一个特征向量即可.

(3) 对空间维数用数学归纳法. 考虑 A,B 的某个公共单位特征向量 α_1, 扩充成一组标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 在这组基下 A,B 的矩阵分别是 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & C_1\\ 0 & A_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mu_1 & D_1\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$. 它们可交换, 因此 A_1,B_1 也可交换. 可定义 $\tilde{A}_1=P_{\langle\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle}A_1|_{\langle\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle}$, 其中 $P_{\langle\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle}$ 是平行于 $\langle\alpha_1\rangle$ 的投影算子, 然后类似定义 $\tilde{B}_1$. 因此由归纳假设存在 $\langle\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$ 上的一组基 $\beta_2,\cdots,\beta_n$ 使得 A_1,B_1 为上三角矩阵. 此时, 在基 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下, A,B 都是上三角矩阵.

5. 容易验证特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 每个特征值分别为 n_i 重. 由于 A 可对角化当且仅当特征值的对应几何重数也为 n_i 重, 而这当且仅当 $A_i=\lambda_iI_{n_i}$(考虑 $\operatorname{rank}(A)$ 即可, 取其主子式).

6. (1) $\begin{bmatrix}I & X\\ O & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -X\\ O & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$.

(2) 成立. 记 $V=F^{(m+n)\times(m+n)}$, 构造 V 上的线性变换 $\varphi_1(Y):=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}Y-Y\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix},\varphi_2(Y):=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}Y-Y\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$. 由于 $\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$ 相似, 因此存在可逆矩阵 $T\in V$ 使得 $T^{-1}\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$. 简单计算得 $\varphi_2(Y)=T\varphi_1(T^{-1}Y)$, 这表明 $Y\in\operatorname{Ker}\varphi_2\Leftrightarrow T^{-1}Y\in\operatorname{Ker}\varphi_1$, 即 $\dim(\operatorname{Ker}\varphi_1)=\dim(\operatorname{Ker}\varphi_2)$. 将 Y 分块为 $\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}$, 计算可知

$$\operatorname{Ker}\varphi_1=\left\{\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}:AP=PA,AQ=QB,BR=RA,BS=SB\right\},$$

$$\operatorname{Ker}\varphi_2=\left\{\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}:AP+CR=PA,AQ+CS=QB,BR=RA,BS=SB\right\}.$$

再构造线性映射 $\mu_i:\operatorname{Ker}\varphi_i\to F^{n\times(m+n)},\mu_i\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}=(R,S),i=1,2$. 由于

$$\operatorname{Ker}\mu_1=\operatorname{Ker}\mu_2=\left\{\begin{pmatrix}P & Q\\ O & O\end{pmatrix}:AP=PA,AQ=QB\right\},\operatorname{Im}\mu_2\subset\operatorname{Im}\mu_1=\{(R,S):BR=RA,BS=SB\},$$

因此由维数关系知 $\operatorname{Im}\mu_1=\operatorname{Im}\mu_2$. 注意到 $\begin{pmatrix}O & O\\ O & -I\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}\varphi_1$, 因此 $(O,-I)\in\operatorname{Im}\varphi_1=\operatorname{Im}\varphi_2$, 从而必然存在某个 P,Q 使得 $\begin{pmatrix}P & Q\\ O & -I\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}\varphi_2$, 此时 $AQ-QB=C$.

【编者注】Roth 定理的另一部分: $AX-YB=C$ 有解 X,Y 的充要条件是 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$. 有兴趣的读者可以试着自己探究证明, 利用分块矩阵的行列变换技巧.

7. 只需找到公共的低维不变子空间, 剩下的可对维数归纳. 不妨设 $\det A=0$, 否则只需将 A 换成 $A-\lambda_AI$, 其中 λ_A 是 A 的某个特征值. 若 $\operatorname{Ker}A$ 不是 B 的不变子空间, 则存在 $\alpha\in\operatorname{Ker}A$ 使得 $B\alpha\notin\operatorname{Ker}A$. 此时 $(AB-BA)\alpha=AB\alpha\neq0$, 这也意味着 $\operatorname{Im}(AB-BA)=\operatorname{span}\{AB\alpha\}$. 从而 $\forall\beta\in\mathbb{C}^n$, $(AB-BA)\beta=\lambda_\beta AB\alpha\Rightarrow BA\beta=AB(\beta-\lambda_\beta\alpha)$, 这表明 $\operatorname{Im}A$ 是 B 的不变子空间. 因此 $\operatorname{Ker}A,\operatorname{Im}A$ 中必有 B 的不变子空间, 由 $\det A=0$ 知除非 $A=0$, 否则此问题已降维.

8. 是. 设 $(Q_1+\mathrm{i}Q_2)A=B(Q_1+\mathrm{i}Q_2)$, 且它们都是实矩阵. 那么 $Q_1A=BQ_1, Q_2A=BQ_2$. 由于 $|Q_1+\lambda Q_2|=0$ 至多只有有限多个解 ($Q_2=0$ 是平凡情形), 从而存在 λ_0 使得 $Q_0:=Q_1+\lambda_0Q_2$ 可逆, 此时 $A=Q_0^{-1}BQ_0$, 因此实相似.
9. 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知 $\mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(I+A)=2$, 即 $\dim(\mathrm{Ker}(I-A))+\dim(\mathrm{Ker}(I+A))=2$. 又由于 $1-x$ 与 $1+x$ 互质, 从而根据裴蜀定理知 $\mathrm{Ker}(I-A)\cap\mathrm{Ker}(I+A)=\{0\}$, 从而 $\mathbb{R}^2=\mathrm{Ker}(I-A)\oplus\mathrm{Ker}(I+A)$. 这同样适用于矩阵 B. 且由题意 $AB+BA=O$ 知 A,B 均不为 $\pm I$, 因此 A,B 的特征值均为 ±1. 从而存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 令 $H=PBP^{-1}$, 则 $B^2=H^2=I$; $AB+BA=O\Rightarrow(PAP^{-1})H+H(PAP^{-1})=O$. 这可以得到 $H=\begin{pmatrix}0&h\\\frac{1}{h}&0\end{pmatrix}(h\neq0)$. 现在取 $T=\begin{pmatrix}1&0\\0&h\end{pmatrix}P^{-1}$ 即可.
10. 容易验证 $\mathrm{rank}(A)=n-1$, 且 $|\lambda I-A|=\lambda^{n-1}|\lambda*1-\alpha^T\beta|\Rightarrow A$ 有特征值 $0((n-1)$重$)$ 和 $\alpha^T\beta$, 且特征值 0 的几何重数是 $n-1$. 因此若 $\alpha^T\beta\neq0$, 正好有 n 个特征向量; 若 $\alpha^T\beta=0$, 只有 $n-1$ 个特征向量.
11. 注意到 $\sigma^2(A)=A$. 从而有 2 个特征值 ±1, 对应的特征子空间为 $\mathrm{span}\{E_{11},\cdots,E_{nn},E_{ij}+E_{ji},\cdots\}(1\le i\neq j\le n)$ 和 $\mathrm{span}\{E_{ij}-E_{ji},\cdots\}(1\le i\neq j\le n)$. 它们维数加起来是 n^2, 因此可以对角化.
12. (1) 设一个非平凡不变子空间是 W, 并取 $\xi=a_1e_1+\cdots+a_ne_n\in W$. 从而 $A\xi=\lambda\xi+\sum_{i=2}^n a_ie_{i-1}\Rightarrow a_2e_1+\cdots+a_ne_{n-1}\in W$. 如此往复作用下去, 可知 $e_1\in W$. 这也表明不可能存在直和, 不变子空间比至少交于 $\mathrm{span}\{e_1\}$.
(2) 设 $a_s\neq0$ 而 $a_{s+1}=\cdots=a_n=0$. 根据上问倒数第二步 $a_{s-1}e_1+a_se_2\in W$ 知 $e_2\in W$, 再根据倒数第三步知 $e_3\in W$, 以此类推. 因此若 $\dim W=m$, 其必为 $\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_m\}$. 从而 A 有 $n+1$ 个不变子空间: $\{0\},\mathrm{span}\{e_1\},\mathrm{span}\{e_1,e_2\},\cdots,\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\},\mathbb{R}^n$.
13. 考虑集合 $M=\{\phi_i\in\mathrm{End}_K(V):\phi_i\phi_j=\phi_j\phi_i,\text{且}\phi_i\text{可对角化},\forall i,j\in I\}$, 然后对维数用数学归纳法. $n=1,2$ 时结论显然成立. 假设对一切维数小于 n 的线性空间成立, 下面考虑 n 维空间. 任取某非数乘变换 $\phi_0\in M$, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是其特征值, 对应重数为 $n_1,\cdots,n_s$, 且 $\sum_{j=1}^s n_j=n$, 特征子空间为 $V_1,\cdots,V_s$. 与该分块单位矩阵可交换的矩阵必然也是相应的分块对角矩阵 (即 V_j 都是 ϕ_i 的不变子空间), 且所有 ϕ_i 在 V_j 上的限制都可交换. 因此由归纳假设, 存在 V_j 的一组基 $\xi_{j1},\cdots,\xi_{j,n_j}$ 使得 $\phi_i|_{V_j}$ 在这组基下的矩阵都是对角阵. 然后把这 s 组基按顺序拼接起来即可.
14. 注意到 $A^2-A=O$, 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知 A 可对角化且有特征值 $0,1$. 因此 A 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(I_r,O_{n-r})$. 由于相似矩阵具有相同的秩和迹, 因此 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)$.
15. 设 $\mathrm{rank}M=r$, 则存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PMQ=\mathrm{diag}(I_r,O_{n-r})$. 由 $AM=MB$ 得到 $(PAP^{-1})\mathrm{diag}(I_r,O_{n-r})=\mathrm{diag}(I_r,O_{n-r})(Q^{-1}BQ)$, 对 PAP^{-1} 和 $Q^{-1}BQ$ 作分块 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$, 代入得 $A_{11}=B_{11},A_{21}=B_{12}=O$. 又由 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$ 知 $A_{22}=B_{22}$. 最后对 $Q^{-1}XP^{-1}$ 作分块 $\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$, 计算知 $|A-MX|=|A_{11}-X_{11}||A_{22}|=|B_{11}-X_{11}||B_{22}|=|B-XM|$.

14 第 13 次习题课: 二次型, 矩阵的合同

14.1 问题

1. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$. (1) 将 $f(X)$ 写成 X^TAX 的形式, 其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$, A 是实对称矩阵; (2) 求正交矩阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 和对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 满足 $A=PDP^T$ 且 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\lambda_3$; (3) 作变量的正交替换 $X=PY=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$, 试用 Y 表示 $f(X)$; (4) 证明 $\lambda_3\|X\|_2^2\le X^TAX\le\lambda_1\|X\|_2^2$, 并求出取等号条件; (5) 确定二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型和对称轴; (6) 用成对的行列变换法将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $\mathbb{Q}$ 上的合同标准型, 并将 A 写成 UDU^T 的形式, 其中 U 是 $\mathbb{Q}$ 上的可逆矩阵, D 是 $\mathbb{Q}$ 上的对角矩阵.
2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 的 SVD 分解, 并写出它的最佳秩 1 逼近和 Moore-Penrose 逆 A^+.
3. 写出下列矩阵在实数域上的相抵分类, 相似分类和合同分类.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&3&1\\0&1&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

4. 实正规矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_1 & A_3\\ O & A_2\end{bmatrix}$(即 $AA^T=A^TA$), 且 A_1,A_2 是方阵. 证明 $A_3=0$, 且 A_1,A_2 都实正规.

5. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1\geq\cdots\lambda_n$, 对应的单位正交特征向量是 $\beta_1,\cdots,\beta_n$. (1) 证明: 对任意 $0\neq X\in\mathbb{R}^n$ 且 $X\perp\langle\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}\rangle$, 有 $\frac{X^TAX}{X^TX}\leq\lambda_k$; (2) 对任意 $n-k+1$ 维子空间 $V\subset\mathbb{R}^n$, 都有 $\max_{0\neq X\in V}\frac{X^TAX}{X^TX}\geq\lambda_k$. 注意到两问都是可以取等号的, 因此 $\lambda_k=\min_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=n-k+1}\max_{0\neq X\in V}\frac{X^TAX}{X^TX}$.

【编者注】这是特征值的极小-极大刻画. 当然也有极大-极小刻画, 你能写出来吗?

6. 设 n 阶实对称矩阵 A,B 的特征值分别为 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n,\mu_1\geq\cdots\geq\mu_n$. 若 $A-B\succeq 0$, 证明 $\lambda_k-\mu_k\geq 0,\forall k$.

7. 证明: 线性空间 V 上的双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 是反对称的充要条件是 $f(\alpha,\alpha)\equiv 0$.

8. 已知数域 K 上的非平凡对称双线性函数 f 可以分解成两个线性函数 f_1,f_2 的积: $f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)$, 问是否存在线性函数 g 使得 $f(\alpha,\beta)=g(\alpha)g(\beta)$? 如果存在, 请说明理由; 如果不存在, 请举出反例, 并做适当修改使得命题成立.

9. A,B 是 n 阶实对称矩阵, 证明 $A,B,A+B$ 的正惯性指数 $p(A),p(B),p(A+B)$ 满足 $p(A)+p(B)\geq p(A+B)$.

10. $A_1,\cdots,A_s$ 都是 n 阶实对称矩阵, $1\leq s\leq n$, 且 $A_1+\cdots+A_s=I_n$. 证明下述两个条件等价: (1) $A_i^2=A_i,\forall i$; (2) $\mathrm{rank}A_1+\cdots+\mathrm{rank}A_s=n$.

14.2 解答

1. (1) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. (2) 特征值是 $1,1,-2$, 对应单位特征向量 $\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})^T,\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$. (3) $f(X)=Y^TDY=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$.

(4) 正交变换不改变矩阵的模长, 因此等价于 $\lambda_3\|Y\|^2\leq Y^TDY\leq\lambda_1\|Y\|_2^2$, 取等号条件分别是与 β_3 同向和与 β_1 同向.

(5) 由于特征值有两个正数和一个负数, 因此是单叶双曲面, 对称轴是 $X=t\beta_3,t\in\mathbb{R}$.

$$(6)\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①}+=\frac{1}{2}*\text{②}]{\text{①}+=\frac{1}{2}*\text{②}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{②}-=\text{①}\\ \text{③}+=\frac{1}{2}*\text{①}}]{\substack{\text{②}-=\text{①}\\ \text{③}+=\frac{1}{2}*\text{①}}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}+=\frac{3}{2}*\text{②}]{\text{③}+=\frac{3}{2}*\text{②}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}:=$$

D. 由成对行列变换过程知 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

2. 先求 AA^T 的非零特征值为 $6,1$, 因此 $\sigma_1=\sqrt{6},\sigma_2=1,U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 其最佳秩 1 逼近是 $\sigma_1u_1v_1^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 2\end{pmatrix}$, $A^+=\sum_{i=1}^2\sigma_i^{-1}v_iu_i^T=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

3. 相抵分类: $\mathrm{rank}(A)=2,\mathrm{rank}(B)=2,\mathrm{rank}(C)=3,\mathrm{rank}(D)=2$, 因此是 $\{A,B,D\},\{C\}$.

相似分类: $\sigma(A)=\{2,1,0\},\sigma(B)=\{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2},0\},\sigma(C)=\{1,1,1\},\sigma(D)=\{2,1,0\}$, 因此是 $\{A,D\},\{B\},\{C\}$.

合同分类: $\mathrm{sgn}\sigma(A)=\{1,1,0\},\mathrm{sgn}\sigma(B)=\{1,0,-1\},\mathrm{sgn}\sigma(C)=\{1,1,1\},\mathrm{sgn}\sigma(D)=\{1,1,0\}$, 因此是 $\{A,D\},\{B\},\{C\}$.

4. 比较 $AA^T=A^TA$ 的左上角知 $A_1A_1^T+A_3A_3^T=A_1^TA_1$. 两边取迹知 $\mathrm{tr}(A_3A_3^T)=0\Rightarrow A_3=0$. 从而 A_1 正规, 再比较右下角知 A_2 也正规.

5. (1) 设 $X=a_k\beta_k+\cdots+a_k\beta_n$ 后显然. (2) 记 $U=\langle\beta_1,\cdots,\beta_k\rangle$, 显然 $\forall\beta\in U$, 有 $\frac{\beta^TA\beta}{\beta^T\beta}\geq\lambda_k$; 又由于 $\dim U+\dim V=n+1>n$, 因此必然存在 $0\neq\gamma\in U\cap V$, 从而 $\max_{0\neq X\in V}\frac{X^TAX}{X^TX}\geq\frac{\gamma^TA\gamma}{\gamma^T\gamma}\geq\lambda_k$.

6. 由 $A-B\succeq 0$ 知 $\forall\alpha\in\mathbb{R}^n,\alpha^TA\alpha\geq\alpha^TB\alpha$. 从而

$$\lambda_k=\min_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=n-k+1}\max_{0\neq X\in V}\frac{X^TAX}{X^TX}\geq\min_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=n-k+1}\max_{0\neq X\in V}\frac{X^TBX}{X^TX}=\mu_k.$$

7. 必要性: $f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)\Rightarrow f(\alpha,\alpha)=0$. 充分性: $f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha,\alpha)-f(\beta,\beta)=0$.
8. 反例是 $K=V=\mathbb{Q}, f(\alpha,\beta)=2\alpha\beta$. 可做如下修改: $\exists k\in K$ 使得 $f(\alpha,\beta)=kg(\alpha)g(\beta)$.
首先 $\exists\alpha_0,\beta_0$ 使得 $f(\alpha_0,\beta_0)=f_1(\alpha_0)f_2(\beta_0)=f_1(\beta_0)f_2(\alpha_0)\neq 0\Rightarrow f_1(\alpha_0)\neq 0, f_2(\alpha_0)\neq 0$. 其次由对称性知 $f(\alpha_0,\beta)=f(\beta,\alpha_0)=f_1(\alpha_0)f_2(\beta)=f_1(\beta)f_2(\alpha_0)\Rightarrow f_2(\beta)=\frac{f_2(\alpha_0)}{f_1(\alpha_0)}f_1(\beta)$, 取 $k=\frac{f_2(\alpha_0)}{f_1(\alpha_0)}, g=f_1$ 即可.
9. 若 A,B 均半正定, 则 $A+B$ 也半正定, 从而 $p(A+B)=\mathrm{rank}(A+B)\leq \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B=p(A)+p(B)$. 否则, 可设 $A=C^T\mathrm{diag}(I_p,-I_{r-p},O_{n-r})C$, 其中 C 是可逆矩阵, 并记 $A_1=C^T\mathrm{diag}(I_p,O_{n-p})C, A_2=C^T\mathrm{diag}(O_p,-I_{r-p},O_{n-r})C$, 那么 $p(A)=p(A_1), A=A_1+A_2$. 同理可以找到 B_1,B_2. 那么 $A+B=(A_1+B_1)+(A_2+B_2)$, 而 A_1+B_1 是半正定矩阵, A_2+B_2 是半负定矩阵, 因此 $p(A+B)\leq p(A_1+B_1)\leq p(A_1)+p(B_1)=p(A)+p(B)$.
10. (1) $\Rightarrow$ (2): $A_i^2=A_i\Rightarrow A_i$ 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(I_r,O)$, 从而 $\sum_{i=1}^s \mathrm{rank}A_i=\sum_{i=1}^s \mathrm{tr}A_i=\mathrm{tr}(\sum_{i=1}^s A_i)=\mathrm{tr}(I_n)=n$.
(2) $\Rightarrow$ (1): 不妨设 $s\geq 2$. 令 $B_i=\sum_{j\neq i}A_j$, 则 $A_i+B_i=I_n$. A_i 是实对称矩阵, 因此存在正交矩阵 Q 使得 $Q^TA_iQ=\mathrm{diag}(D_i,O_{n-i})$, 其中 $D_i=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{r_i})$, 且 $\lambda_j\neq 0$, $r_i=\mathrm{rank}A_i$. 于是 $Q^TB_iQ=I-Q^TA_iQ=\mathrm{diag}(1-\lambda_1,\cdots,1-\lambda_{r_i},1,\cdots,1)$. 这表明 $\mathrm{rank}(Q^TB_iQ)\geq n-r_i$. 另一方面又有 $\mathrm{rank}(Q^TB_iQ)=\mathrm{rank}B_i\leq\sum_{j\neq i}\mathrm{rank}A_j=n-\mathrm{rank}A_i=n-r_i$. 这表明啊 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{r_i}=1$, 因此 $A_i=Q^T\mathrm{diag}(I_{r_i},O_{n-r_i})Q\Rightarrow A_i^2=A_i$.

15 第 14 次习题课: 正定矩阵

15.1 问题

1. 设 $n(\geq 2)$ 阶实方阵 $A=\begin{pmatrix} b+8 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & b & 1 & \cdots & 1\\ 3 & 1 & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 3 & 1 & \cdots & 1 & b\end{pmatrix}$, 试求 b 的取值范围使得 A 正定.
2. 设 $f=a\sum_{i=1}^n x_i^2+b\sum_{i=1}^n x_ix_{n-i+1}$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$. 问 a,b 满足什么条件时 f 正定.
3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$. (1) 问当 a 取何值时, f 为正定二次型; (2) 取 $a=1$, 试用非退化线性替换把 f 化为规范型, 并写出所用线性替换; (3) 取 $a=1$, 问当 b 取何值时, 矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&b\end{pmatrix}$ 与 f 的矩阵 A 合同?
4. A,B 是 n 阶正定矩阵, 证明 $|A+B|\geq|A|+|B|$.
5. 设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $s\times n$ 行满秩实矩阵, $Q=AB^T(BB^T)^{-1}BA^T$. 证明 AA^T-Q 半正定.
6. (Hadamard 不等式)$A=(a_{ij})$ 正定, 证明 $|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
7. A,B 是 n 阶正定矩阵, 证明: (1) AB 的特征值全大于零; (2) 若 A,B 可交换, 则 AB 也正定.
8. S 是 n 阶实对称正定矩阵. 证明: (1) 存在实对称正定矩阵 S_1 使得 $S_1^2=S$, 并判断这样的 S_1 是否唯一; (2) 若 A 是 n 阶是对称矩阵, 则 AS 的特征值都是实数.
9. (Riesz 表示定理) 设 V 是实数域上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是正定双线性函数. 证明对于任意 $g\in V^*$, 存在唯一的 $\alpha\in V$ 使得 $g(\beta)=f(\alpha,\beta),\forall\beta\in V$.
10. A,B 是同阶实对称正定矩阵, $A\succ B$, 问是否一定有 $A^2\succ B^2$? 若将条件和结论里的 $\succ$ 同时改为 $\succeq$ 呢?

15.2 解答

1. 记 $\alpha_k=(3,1,\cdots,1)^T\in\mathbb{R}^k$, 则 A 的 k 阶顺序主子式为 $|A_k|=\left|\begin{pmatrix} b-1 & & & \\ & b-1 & & \\ & & \vdots & \\ & & & b-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right|=$ $|(b-1)I_k+\alpha_k\alpha_k^T|=(b-1)^{k-1}|(b-1)I_1+\alpha^T\alpha|=(b-1)^{k-1}(b+k+7)$, 因此 A 正定的充要条件是 $|A_k|>0,\forall k=1,2,\cdots,n\Leftrightarrow b>1$.

2. 当 n 为奇数时, f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & & & & & & b \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a & & b & & \\ & & & a+b & & & \\ & & b & & a & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ b & & & & & & a \end{pmatrix}$, 且 $\begin{cases} |A_j| = a^j\ (1\le j\le k) \\ |A_{k+1}| = (a+b)a^k \\ |A_{k+1+j}| = (a+b)a^{k-j}(a^2-b^2)^j\ (1\le j\le k) \end{cases}$,

其中 $|A_k|$ 表示 k 阶顺序主子式. 因此 $a>0, a+b>0, a-b>0$ 时 f 正定.

当 n 为偶数, f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}$, 且 $\begin{cases} |A_j| = a^j\ (1\le j\le k) \\ |A_{k+j}| = a^{k-j}(a^2-b^2)^j\ (1\le j\le k) \end{cases}$. 因此 $a>0, a^2-b^2>0$ 时 f 正定.

3. (1) 二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 各阶顺序主子式分别为 $a, a^2-1, (a+1)^2(a-2)$, 因此当 $a>2$ 时 f 正定.

(2) $a=1$ 时, 二次型 $f=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2x_3$. 令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = x_2-x_3 \\ y_3 = x_2+x_3 \end{cases}$, 则有非退化线性替换 $\begin{cases} x_1 = y_1-y_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_2+y_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(-y_2+y_3) \end{cases}$ 及规范型 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(3) 矩阵 B 对应的二次型为 $g=x_1^2-x_2^2+bx_3^2+4x_2x_3=x_2^2-(x_2-2x_3)^2+(b+4)x_3^2$, 因此当 $b>-4$ 时两者合同.

4. 存在可逆矩阵 P 及正交矩阵 Q 使得 $P^TAP=I_n$, $Q^T(P^TBP)Q=\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$, 其中 $\mu_i\ge 0, \forall i=1,2,\cdots,n$. 令 $G=PQ$, 则 $G^T(A+B)G=\operatorname{diag}(1+\mu_1,\cdots,1+\mu_n)$. 两边取行列式知 $|A+B||P^2|=(1+\mu_1)\cdots(1+\mu_n)\ge 1+\mu_1\cdots\mu_n$, 即是 $|A+B|\ge(1+\mu_1\cdots\mu_n)|P|^{-2}=|A|+|B|$.

5. 由 A,B 行满秩知 $\operatorname{rank}(AA^T)=\operatorname{rank}(A)=m, \operatorname{rank}(BB^T)=\operatorname{rank}(B)=s$, 因此 AA^T, BB^T 都可逆. 易知分块矩阵 $\begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T$ 是半正定矩阵, 且与 $\begin{pmatrix} AA^T-Q & O \\ O & BB^T \end{pmatrix}$ 合同, 因此 AA^T-Q 半正定.

6. 只需证明 $|A|\le|A_{n-1}|a_{nn}$ 即可, 其中 $|A_{n-1}|$ 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 设 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix}$, 由初等行列变换知 $|A|=|A_{n-1}|(a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\beta)$. 由于 A_{n-1} 正定, 因此 $\beta^TA_{n-1}^{-1}\beta\ge 0$, 因此 $a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\beta\le a_{nn}$, 即 $|A|\le|A_{n-1}|a_{nn}$.

7. (1) 设 $A=C^TC, B=D^TD$, 其中 C,D 是可逆矩阵, 则 $AB=C^TCD^TD$. 由于 C^TCD^TD 和 CD^TDC^T 有相同特征值, 而后者是正定矩阵, 因此 AB 的特征值都大于零.

(2) 因为 $AB=BA$, 所以 $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$, 因此由 (1) 的结论知是正定矩阵.

8. (1) 设 $S=PDP^T$, 其中 P 是正交矩阵, D 是对角元均为正数的对角矩阵. 可自然地定义 $D_1=D^{\frac{1}{2}}$, 则 $S_1=PD_1P^T$. 下面证唯一性. 若还存在 $S=S_2^2$, 则 S_1 和 S_2 具有相同的特征值, 也就会存在正交矩阵 P_1,P_2 使得 $S_1=P_1D_1P_1^T, S_2=P_2D_1P_2^T$. 那么 $S_1^2=S_2^2\Rightarrow D(P_1^TP_2)=(P_1^TP_2)D$. 记 $P=P_1^TP_2=(p_{ij})_{n\times n}$, 比较等式两边元素知 $\lambda_ip_{ij}=p_{ij}\lambda_j$, 这也意味着 $\sqrt{\lambda_i}p_{ij}=p_{ij}\sqrt{\lambda_j}\Rightarrow D_1P=PD_1\Rightarrow S_1=S_2$.

(2) 只需注意到 $AS=AS_1^2$ 与 S_1AS_1 有相同特征值, 而后者实对称矩阵.

9. 考虑子空间 $M:=\{x: g(x)=0\}$, 则存在 $x_0\in M_f^{\perp}$, 不妨设 $\|x_0\|_{f,2}=1$. $\forall x\in V$, 其可分解为 $x=\frac{g(x)}{g(x_0)}x_0+y$, 且满足 $g(y)=0$. 等式两边同时和 x_0 作用于 f 得到 $f(x,x_0)=\frac{g(x)}{g(x_0)}f(x_0,x_0)+f(x_0,y)=\frac{g(x)}{g(x_0)}$. 因此取 $\alpha=g(x_0)x_0$ 即可.

10. 都不一定. (1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. (2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢北京大学数学科学学院 23 级本科生陈全同学, 他极大地辅助了我的教学工作. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.