高等代数第四章 矩阵的运算

重要概念：

请读者注意：如无特殊说明，矩阵$A=(a_{ij})$。

1. 矩阵的运算

乘法交换律：$A(BC)=(AB)C$。

乘法分配律：$A(B+C)=AB+AC$；$(A+B)C=AC+BC$。

矩阵的转置表示列写成行，行写成列，记为A^T。$(AB)^T=B^TA^T$。

2. 特殊矩阵

单位矩阵I：$a_{ii}=1$，$a_{ij}=0\ (i\neq j)$。数量矩阵：kI。

初等矩阵P：$P(i;j)$表示对I的i、j行交换；$P(i(c))$表示对I的第i行×c；

$P(j,i(k))$表示对I的第i行的k倍加到第j行上或者第j列的k倍加到第i列上。

基本矩阵E：E_{ij}表示$a_{ij}=1$，其余元为0。

对角矩阵：$\mathrm{diag}\{d_1,\ldots,d_n\}$表示主对角元为$d_1,\ldots,d_n$，其余元为0。

对称矩阵：$A^T=A$。斜对称矩阵：$A^T=-A$。

*对合矩阵：$A^2=I$。幂等矩阵：$A^2=A$。幂零矩阵：$A^t=0$。

3. 矩阵乘积的秩与行列式

几个重要的秩(不)等式：

①$A_{s\times n}B_{n\times m}=0$，有$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\leq n$

②$\mathrm{rank}(A+B)\leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

③$\mathrm{rank}(AB)\leq \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$

④$\mathrm{rank}(A_{n\times s}B_{s\times n})\geq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s$

⑤$\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(AA^T)=\mathrm{rank}(A)$

⑥$\mathbf{rank(A)+rank(B)=rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\mathbf{\leq rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$

几个重要的行列式公式：

①$|AB|=|A||B|$

②Cauchy−Binet公式：A是s×n矩阵，B是n×s矩阵。

s＞n时，$|AB|=\left|\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{s\times n}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{n\times s}\right|=0$。

s≤n时，$|AB|=\sum_{1\leq v_1<\cdots<v_s\leq n} A\begin{pmatrix} 1,\cdots,s \\ v_1,\cdots,v_s \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1,\cdots,v_s \\ 1,\cdots,s \end{pmatrix}$。

③A是s×n矩阵，B是n×s矩阵，AB的任一r阶$(r\leq\min\{s,n\})$子式为

$$AB\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_r \\ j_1,\cdots,j_r \end{pmatrix}=\sum_{1\leq v_1<\cdots<v_r\leq n} A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_r \\ v_1,\cdots,v_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1,\cdots,v_r \\ j_1,\cdots,j_r \end{pmatrix}。$$

4. 可逆矩阵

矩阵可逆$\Leftrightarrow$矩阵的秩不等于0。矩阵有逆矩阵，则逆矩阵唯一，记为A^{-1}。

伴随矩阵：$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$（**注意矩阵是转置过来写的！！！**）

满足$AA^*=|A|I$，$|A^*|=|A|^{n-1}$。$(AB)^*=B^*A^*$。

任一可逆矩阵可以通过左（右）乘一系列初等矩阵化为单位矩阵。

单位矩阵可以通过左（右）乘一系列初等矩阵化为任一可逆矩阵。

用可逆矩阵去左（右）乘任一矩阵，不改变改矩阵的秩。

$(A,I)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I,A^{-1})$。$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

5. 矩阵的分块

用分块矩阵的一个求逆矩阵思路：$AB=I$，$A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$，$A\alpha_i=\beta_i$。去求每组解$\alpha$即可。

分块矩阵的初等行（列）变换：两块行（列）互换位置；一块行的**左（右）**P倍（P是矩阵）加到另一块行上；用可逆矩阵**左（右）**乘某一块行。

6. 正交矩阵，欧几里得空间$\boldsymbol{R^n}$

定义内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$。我们称$\boldsymbol{R^n}$是一个欧几里得空间。内积为0，向量正交。

正交矩阵意味着$A^TA=I$。正交基意味着n个向量组成的正交向量组。正交向量组中的向量一定线性无关。标准正交基是将正交基单位化后的产物。

正交矩阵的充要条件是它的行/列向量是一组标准正交基。

Schmidt正交化：$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\beta_s=\alpha_s-\sum\limits_{j=1}^{s-1}\dfrac{(\alpha_s,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$，再**单位化**。

7. $\boldsymbol{K^n}$到$\boldsymbol{K^s}$的线性映射

定义为一个映射$f:S\to S'$，即对于每一个$a\in S$，均存在$b\in S'$，s.t.$a\mapsto b$。

把b称为a在f下的**象**，a称为b在f下的**原象**，S称为**定义域**，S'称为**陪域**，象组成的集合$f(S)$或$\mathrm{Im}\,f$称为**值域**。

单射：$a\neq b\Leftrightarrow f(a)\neq f(b)$；**满射**：$f(S)=S'$；**双射**或**同构**：既是单射又是满射。

设A是数域K上的$s\times n$矩阵，令$\boldsymbol{A}:K^n\to K^s,\alpha\mapsto A\alpha$。则$A$是$K^n$到$K^s$的一个映射。这个映射保持加法及数量乘法：$\boldsymbol{A}(\alpha+\beta)=\boldsymbol{A}(\alpha)+\boldsymbol{A}(\beta)$；$\boldsymbol{A}(k\alpha)=k\boldsymbol{A}(\alpha)$。

线性映射：保持加法与数量乘法的映射，即$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$；$f(k\alpha)=kf(\alpha)$。

以下所有讨论发生在线性映射 $\boldsymbol{f:V_1^m\to V_2^m,\alpha\mapsto A\alpha}$下：

I：对于任意的V_1、V_2，必存在f，使得该线性映射成立。（**零映射**即满足）

II：对于每一个形如上式的线性映射，它将零元映射成零元，负元映射成负元，相关向量组映射成相关向量组，**无关向量组不一定映射成无关向量组**。

III：由于$f(\alpha)=f(\sum\limits_{i=1}^n k_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^n k_if(\alpha_i)$是原向量组基的象$f(\alpha_i)$的线性组合，因此我们构造线性映射时，只需要确定基的象。

IV：$f:V_1\to V_2$是**单射**$\Leftrightarrow f(\alpha)=0$则$\alpha=0$。

V：$f:V_1\to V_2$是**同构**$\Rightarrow f$ 把V_1无关向量组映射成V_2无关向量组，把V_1基映射成V_2

基$\Rightarrow \dim V_1=\dim V_2$。
VI：$\dim V_1=\dim V_2 \Rightarrow$ 至少存在一个（进而存在无穷多个）**同构** $f:V_1 \to V_2$。
$Ker(f)$表示在映射f下，映成零元的原象集，称作映射f的**核**(*Kernel*)。
注：1. $Ker(f)$是V_1的子空间；F^m的子空间均为某个$f: F^m \to F^n$的核，thus均为某个齐次线性方程组的解空间。
2. $\{F^m$的子空间$\}$与$\{$线性映射$f:F^m \to F^n$的$Ker(f)\}$并不是一一对应的(this is because有很多不同的齐次线性方程组解相同)。

对于映射 $f:V_1 \to V_2$，固定V_1和V_2的一组基$\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^n$：

我们有$f:V_1 \to V_2$，$(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)X \mapsto (\beta_1,\ldots,\beta_n)AX$。
记$Hom_F(V_1,V_2)$为满足$f:V_1 \to V_2$的所有映射f 构成的集合，是一个(现代)向量空间。
对于某个$f \in Hom_F(V_1,V_2)$，
$\because f(\alpha_i)=f((\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\varepsilon_i)=(\beta_1,\ldots,\beta_n)A\varepsilon_i \Leftrightarrow (f(\alpha_1),\ldots,f(\alpha_m))=(\beta_1,\ldots,\beta_n)A$。

$\therefore$ A由$f \in Hom_F(V_1,V_2)$唯一决定。称A为f 在基$\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^n$下的矩阵。

定义：$\sigma: Hom(V_1,V_2) \to M_{m\times n}(F)$，$f \mapsto A$。（$\sigma$是一一映射）
1. σ线性：$\sigma(f+g)=\sigma(f)+\sigma(g)$，$\sigma(kf)=k\sigma(f)$；
2. σ单：$\sigma(f)=0 \Rightarrow f=0$；
3. σ满：$\forall A \in M_{m\times n}(F)$，$V_1 \to V_2$，$f:(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)X \mapsto (\beta_1,\ldots,\beta_n)AX$，
则$(f(\alpha_1),\ldots,f(\alpha_m))=(\beta_1,\ldots,\beta_n)A$。

设f在基$\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^n$下的矩阵为A，$g$在基$\{\beta_i\}_{i=1}^m, \{\gamma_i\}_{i=1}^n$下的矩阵为B，则$g\circ f$在

基$\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\gamma_i\}_{i=1}^n$下的矩阵为BA。

如果线性映射$f:V_1 \to V_2$存在线性映射$g:V_2 \to V_1$使得$f\circ g=id_{V_2}, g\circ f=id_{V_1}$。则称$f$

是可逆的。f 可逆的充要条件是f 是同构，即$\dim V_1=\dim V_2$。此时有$A_{n\times n}B_{n\times n}=I$。
即：$Hom_F(V,V) \cong M_{n\times n}(F)$（同构），$f \leftrightarrow A$，$f^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$。

8. 一些特殊的矩阵公式（important！）

a. 上（下）三角矩阵乘上（下）三角矩阵仍是上（下）三角矩阵。
b. 正交矩阵乘正交矩阵仍是正交矩阵。
c. 上三角矩阵是正交矩阵，则它一定是对角矩阵且主对角元为±1。
d. 可逆上（下）三角矩阵的逆矩阵仍是上（下）三角矩阵。

e. 设A、B分别是s×n、n×s矩阵，则$|I_s-AB|=|I_n-BA|=\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix}$

f. 若$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$，则$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$

g. 若AC=CA，则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-BC|$（类似公式有很多，要习惯分块）

h. 若A、D分别是r、s阶可逆矩阵，B、C分别是$r\times s$、$s\times r$阶矩阵，则

$$|D||A-BD^{-1}C|=|A||D-CA^{-1}B|=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$（是公式d的一般情况）

好题集萃：

类型1：矩阵的秩

1. 证明：数域K上的n级矩阵A是对合矩阵的充要条件是rank(I+A)+rank(I−A)=n.

解：这道题用矩阵乘除法的性质难以做出。我们换用另一种方法：分块矩阵法。

$rank(I+A)+rank(I-A)=rank\begin{pmatrix} I-A & 0 \\ 0 & 1+A \end{pmatrix}$，对大矩阵进行初等变换：

$$\begin{pmatrix} I-A & 0 \\ 0 & 1+A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I-A & 0 \\ I-A & I+A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I-A & I-A \\ I-A & 2I \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I-A^2 & I+A \\ I-A & 2I \end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix} \frac{I-A^2}{2} & 0 \\ I-A & 2I \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \frac{I-A^2}{2} & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}$，$\therefore$rank(I+A)+rank(I−A)=n $\Leftrightarrow$ rank(I−A^2)=0 $\Leftrightarrow$ A^2=I。

2. 设$A_{m\times n}$、$B_{m\times n}$，证明：$rank(A)+rank(B)+rank(A+B)\geq rank(A,B)+rank\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$。

解：$rank\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}+rank(A,B)\leq rank\begin{pmatrix} A & 0 & B \\ B & A & 0 \\ 0 & A & B \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}rank\begin{pmatrix} A+B & 0 & B \\ A+B & A & 0 \\ A+B & A & B \end{pmatrix}$

$\leq rank\begin{pmatrix} A+B \\ A+B \\ A+B \end{pmatrix}+rank\begin{pmatrix} 0 \\ A \\ A \end{pmatrix}+rank\begin{pmatrix} B \\ 0 \\ B \end{pmatrix}=rank(A+B)+rank(A)+rank(B)$。

3. A、B是n阶方阵，且AB=BA。

(1) 证明：rank(A)+rank(B)≥rank(AB)+rank(A+B)；

(2) 若rank(A^2)=rank(A)，且AB=BA=0，证明：rank(A)+rank(B)=rank(A+B)。

解：(1) $rank(A)+rank(B)=rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{pmatrix}\geq rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ A+B & B(A+B) \end{pmatrix}$

$=rank\begin{pmatrix} A & -AB \\ A+B & 0 \end{pmatrix}\geq rank(AB)+rank\left(A+B\right).$

(2)易证：若rank(A^2)=rank(A)，则矩阵方程A^2C=A有解。

$rank(A+B)=rank\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} A+B & A+B \\ A^2 & A^2 \end{pmatrix}\xrightarrow[1-2\times AC]{}$

$rank\begin{pmatrix} B & A+B \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}\geq rank(A)+rank(B)$.联立rank(A+B)≤rank(A)+rank(B)，命题成立。

4. 设A、B都是n级矩阵，证明：如果AB=BA=0，那么存在正整数m，使得 $\mathrm{rank}(A^m+B^m)=\mathrm{rank}(A^m)+\mathrm{rank}(B^m)$。

解：引理1：对任意 $A\in M_n(F)$，正整数n使得 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+k})$，$k\in Z^+$。

证明：由 $n\geqslant \mathrm{rank}(A)\geqslant \mathrm{rank}(A^2)\geqslant\cdots\geqslant \mathrm{rank}(A^n)\geqslant \mathrm{rank}(A^{n+1})$ 知这n+1个大于等于号中必有一个取到等号。不妨设 $\mathrm{rank}(A^m)=\mathrm{rank}(A^{m+1})$，$m\in\{1,2,\cdots,n\}$。

易知 $A^mX=0$ 与 $A^{m+1}X=0$ 同解。则 $A^m(AX)=0$ 与 $A^{m+1}(AX)=0$ 同解，即 $\mathrm{rank}(A^{m+1})=\mathrm{rank}(A^{m+2})$。由此递推知 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+k})$ 对任意 $k\in Z^+$ 均成立。

引理2：A、B分别是数域K上的s×n和n×m矩阵。矩阵方程ABX=A有解的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$。

证明：ABX=A 有解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(AB,A)$。$\because$ $\mathrm{rank}(AB,A)=\mathrm{rank}[A(B,I)]\leqslant \mathrm{rank}(A)\leqslant \mathrm{rank}(AB,A)$，$\therefore \mathrm{rank}(AB,A)\equiv \mathrm{rank}(A)$；$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(AB,A)=\mathrm{rank}(A)$。

回到原题。由于存在正整数m，使得 $\mathrm{rank}(A^{m+1})=\mathrm{rank}(A^m)$，$\therefore A^{m+1}X=A^m$ 有解。不妨设 $A^{m+1}C=A^m$。下面采用分块矩阵：

$$\begin{pmatrix} A^m+B^m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2+1\times A} \begin{pmatrix} A^m+B^m & 0 \\ A^{m+1} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2+1\times I]{} \begin{pmatrix} A^m+B^m & A^m+B^m \\ A^{m+1} & A^{m+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[1+2\times(-AC)]{}$$

$$\begin{pmatrix} B^m & A^m+B^m \\ 0 & A^{m+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[2+1\times(-I)]{} \begin{pmatrix} B^m & A^m \\ 0 & A^{m+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{1+2\times(-C)} \begin{pmatrix} B^m & 0 \\ 0 & A^{m+1} \end{pmatrix}。$$

$\therefore \mathrm{rank}(A^m+B^m)=\mathrm{rank}(A^{m+1})+\mathrm{rank}(B^m)=\mathrm{rank}(A^m)+\mathrm{rank}(B^m)$。

类型 2：行列式的计算

1. 计算右图的 n 阶行列式(n≥2)：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解：
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ \cdots\ n) - diag\{1,2,\cdots,n\}\right|$$

$$=\left|-diag\{1,2,\cdots,n\}\right|\left|I_n - diag^{-1}\{1,2,\cdots,n\}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ \cdots\ n)\right| \underline{\underline{\Delta}} (-1)^n n! \left|I_1-(1\ 2\ \cdots\ n)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}\right|$$

$=(-1)^n n!(1-n)$. △一步用到了 $|I_n-AB|=|I_s-BA|$。

2. 设B、C分别是实数域上的 $n\times s, n\times(n-s)$ 级矩阵，证明 $\begin{vmatrix} B^TB & B^TC \\ C^TB & C^TC \end{vmatrix} \leq |B^TB||C^TC|$

解：首先说明，$(v_1',\ldots,v_{n-s}')$ 表示 $(v_1,\ldots,v_s)$ 在 $(1,\ldots,n)$ 中的余项。

经过观察，容易发现 $\begin{vmatrix} B^TB & B^TC \\ C^TB & C^TC \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} B^T \\ C^T \end{pmatrix}(B,C)\right| = \left|\begin{pmatrix} B^T \\ C^T \end{pmatrix}\right||(B,C)| = |(B,C)|^2$。我们有：

$$|(B,C)|^2 \xrightarrow{laplace} \left(\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n} (-1)^{\sum_{i=1}^{s}(v_i+i)} B\begin{pmatrix} v_1,\cdots v_s \\ 1,\cdots s \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} v_1',\cdots v_{n-s}' \\ s+1,\cdots,n \end{pmatrix} \right)^2$$

$$\xrightarrow{Cauchy} \le \left(\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n} B\begin{pmatrix} v_1,\cdots v_s \\ 1,\cdots s \end{pmatrix}^2 \right) \left(\sum_{1\le v_1'<\cdots<v_{n-s}'\le n} C\begin{pmatrix} v_1',\cdots v_{n-s}' \\ s+1,\cdots,n \end{pmatrix}^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n} B^T\begin{pmatrix} 1,\cdots,s \\ v_1,\cdots v_s \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1,\cdots v_s \\ 1,\cdots s \end{pmatrix} \right) \left(\sum_{1\le v_1'<\cdots<v_{n-s}'\le n} C^T\begin{pmatrix} s+1,\cdots n \\ v_1',\cdots v_{n-s}' \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} v_1',\cdots v_{n-s}' \\ s+1,\cdots,n \end{pmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{Binet-Cauchy} \left|B^T B\right|\left|C^T C\right| 。$$

类型3：Schmidt正交化

1. 设A是实数域上的n级矩阵，证明：如果A可逆，那么A可以唯一地分解成正交矩阵T和主对角元都为正数的上三角矩阵B的乘积：A=TB。

解：先证明可分解性。由于矩阵A可逆，所以A的列向量组($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$)线性无关。经过Schmidt正交化可得到与($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$)等价的正交向量组($\beta_1,\ldots,\beta_n$)。所以：

$$\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\beta_2,\cdots,\alpha_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i+\beta_n 。$$

记$b_{ji}=\dfrac{(\alpha_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}, \eta_i=\dfrac{1}{|\beta_i|}\beta_i$。我们有：

$$(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} |\beta_1| & b_{12}|\beta_1| & \cdots & b_{1n}|\beta_1| \\ 0 & |\beta_2| & \cdots & b_{2n}|\beta_n| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\beta_n| \end{pmatrix},$$

即$A=TB$，T是$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，B是$\begin{pmatrix} |\beta_1| & b_{12}|\beta_1| & \cdots & b_{1n}|\beta_1| \\ 0 & |\beta_2| & \cdots & b_{2n}|\beta_n| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\beta_n| \end{pmatrix}$。

再证明唯一性。设$A=T_1B_1=T_2B_2$。两边左乘T_1^{-1}、右乘B_2^{-1}，得到$B_1B_2^{-1}=T_1^{-1}T_2$。由于等式左边是上三角矩阵，右边是正交矩阵。由性质c知道$B_1B_2^{-1}$是对角矩阵，且主对角元是±1。因为$B_1B_2^{-1}$主对角元是正数，所以$B_1B_2^{-1}=I$。即$B_1=B_2$，$T_1=T_2$。

2. 设A是实数域上的m×n矩阵，其中m＞n。证明：如果A的列向量组($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$)线性无关，那么A可以唯一分解成A=QR，其中Q是列向量组为正交单位向量组的m×n矩阵，R是主对角元都是正数的n级上三角矩阵，这称为QR-分解。

解：可分解性与上题同。下证唯一性。

设$A=Q_1R_1=Q_2R_2$。等式两边右乘R_1^{-1}，得$Q_1=Q_2R_2R_1^{-1}$。容易知道$R_2R_1^{-1}$仍是主对角元为正数的上三角矩阵。不妨设$Q_1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$，$Q_2=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$，$R_2R_1^{-1}=(c_{ij})$。

$$\therefore(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}=(c_{11}\beta_1,\cdots,c_{1n}\beta_1+\cdots c_{nn}\beta_n)。$$

回顾正交向量的性质：$(\eta_i,\eta_j)=\delta_{ij}$。我们有：

$$(\alpha_1,\alpha_1)=(c_{11}\beta_1,c_{11}\beta_1)=c_{11}^2(\beta_1,\beta_1)=c_{11}^2=1\Rightarrow c_{11}=1；$$

$$(\alpha_1,\alpha_j)=(c_{11}\beta_1,\sum_{i=1}^{j}c_{ij}\beta_i)=c_{11}c_{1j}(\beta_1,\beta_1)+\sum_{i=2}^{j}c_{11}c_{ij}(\beta_1,\beta_i)=c_{11}c_{1j}=0\Rightarrow c_{1j}=0；$$

$$(\alpha_2,\alpha_2)=(c_{12}\beta_1+c_{22}\beta_2,c_{12}\beta_1+c_{22}\beta_2)=c_{12}^2+c_{22}^2=1\Rightarrow c_{22}=0；\ \ldots\ldots$$

依次进行下去，知道$c_{ii}=1$，$c_{ij}=0(i\neq j)$。所以$R_2R_1^{-1}=I$。继而$R_1=R_2$，$Q_1=Q_2$。

类型4*：矩阵的实际应用

1. 证明：如果整数a和b可以表示成形式为$x^3+y^3+z^3-3xyz$的形式，那么ab也能表示成这种形式的数。

解：易知$x^3+y^3+z^3-3xyz=\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=|xI+yC+zC^2|$，其中$C=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$是循环移位矩阵，知$C^3=I$。

$\therefore ab=|x_1I+y_1C+z_1C^2||x_2I+y_2C+z_2C^2|=|(x_1I+y_1C+z_1C^2)(x_2I+y_2C+z_2C^2)|$

$=|(x_1x_2+y_1z_2+y_2z_1)I+(x_1y_2+x_2y_1+z_1z_2)C+(x_1z_2+x_2z_1+y_1y_2)C^2|$

$=(x_1x_2+y_1z_2+y_2z_1)^3+(x_1y_2+x_2y_1+z_1z_2)^3+(x_1z_2+x_2z_1+y_1y_2)^3-3(x_1x_2+y_1z_2+y_2z_1)(x_1y_2+x_2y_1+z_1z_2)(x_1z_2+x_2z_1+y_1y_2)$。得证！

2. 考虑n个城市之间是否有航班连接的问题。令

$A(i;j)=\begin{cases}1,当城市C_i有直飞C_j的航班；\\0,否则,\end{cases}$的n级矩阵称为邻接矩阵。证明：从城市$C_i$到$C_j$所需要的航班个数等于使$A^m(i;j)\neq0$的最小正整数m。

解：利用数学归纳法。m=1,2时均显然成立。

假设航班个数为1,2,⋯,m−1时结论成立。

C_i到C_j所需航班个数为m$\Leftrightarrow$存在C_k使得C_i到C_k需要m−t个航班，C_k到C_j需要t个航班$\Leftrightarrow$存在k使得$A^{m-t}(i;k)\neq0$, $A^t(k;j)\neq0$且对于任意k有$A^{m-t-1}(i;k)=0$或$A^t(k;j)=0$成立$\Leftrightarrow A^m(i;j)=A^{m-t}A^t(i;j)=\Sigma A^{m-t}(i;s)A^t(s;j)\neq0$，而$A^{m-1}(i;j)=\Sigma A^{m-t-1}(i;s)A^t(s;j)=0$。

由数学归纳法知原题结论成立。

本章重点：

1. 分块矩阵与矩阵的分块
2. 矩阵的逆
3. Binet-Cauchy公式
4. 正交矩阵/(单位)正交基
5. 线性映射的矩阵表示

高等代数第五章 矩阵的相抵与相似

重要概念：

1. 等价关系与集合的划分：

集合S上的一个二元关系~如果具有下述性质：∀a,b,c∈S，有

1°a~a（反身性）

2°a~b⇒b~a（对称性）

3°a~b and b~c⇒a~c（传递性）

则称~是S的**一个等价关系**。

所有与a形成等价关系的元素构成的集合叫做由a确定的**等价类**，记为$\bar{a}$。

2. 矩阵的相抵：

如果矩阵A经过一些初等行列变换变成矩阵B，则称A、B相抵，记做$A\overset{\text{相抵}}{\sim}B$。

相抵是一个等价关系，由**矩阵的秩**完全决定。即A、B相抵⇔rank(A)=rank(B)。

这里请读者注意，A、B相抵，必须有A、B∈$M_{m\times n}(F)$。即行列数相等。

相抵标准形：设rank(A)=r，则A~$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。该矩阵称为A的相抵标准型。

由于A可以通过初等行列变换化为它的相抵标准型，故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I_r} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$。其中P、Q是可逆矩阵。

3. 广义逆矩阵

定义：使得AXA=A的所有解X称为A的**广义逆矩阵**，记做A^-。即：$\boldsymbol{AA^-A=A}$。

若$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，则$A^-=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}$，s.t. $AA^-A=A$。显然广义逆矩阵**不唯一**。

非齐次线性方程组AX=β有界的充要条件是$\beta=AA^-\beta$。

非齐次线性方程组AX=β有界，则它的通解可以表示为$A^-\beta$。

4. 矩阵的相似

*研究矩阵相似的来源：

在线性映射中，由于基的选取不同，就算是自身到自身的映射$f: V\rightarrow V$，就算是对于同一个f，对应的矩阵都可以千变万化。那么这个f对应的所有矩阵之间到底有什么规律和联系呢？

设$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$是一组基，$(\beta_1,\ldots,\beta_n)$是另一组基，$(f(\alpha_1),\ldots,f(\alpha_n))=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)A$，$(f(\beta_1),\ldots,f(\beta_n))=(\beta_1,\ldots,\beta_n)B$，并且满足$(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)C$。易证C可逆。

则$(f(\beta_1),\ldots,f(\beta_n))=(f(\alpha_1),\ldots,f(\alpha_n))C\Rightarrow(\beta_1,\ldots,\beta_n)B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)AC$

$\Rightarrow(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)CB=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)AC\Rightarrow CB=AC\Rightarrow B=C^{-1}AC$。这便是矩阵相似的由来。

定义：称**数域K**上的**n级**矩阵A和B相似，当且仅当存在**数域K**上的n级矩阵**P**，$P^{-1}AP=B$。记作A~B。矩阵相似满足反身性、对称性、传递性，构成一个等价类。

注：相似依赖于把A、B看成是哪个数域上的矩阵。

特别地，与0相似的矩阵为0，与kI相似的矩阵为kI。

矩阵A与B相似，则tr(A)=tr(B)，rank(A)=rank(B)，|A|=|B|，$A^{-1}\sim B^{-1}$。

tr的运算是线性的，且tr(AB)=tr(BA)。

5. 矩阵的特征值与特征向量

定义：$\exists\lambda\in\mathbf{K}$、$\alpha\in\mathbf{K}^{n}$，s.t. $A\alpha=\lambda\alpha$。α称为矩阵A的**特征向量**，λ称为**特征值**。

易证$|\lambda I-A|=0$。我们把$|\lambda I-A|$称为矩阵A的**特征多项式**。此时α是方程$(\lambda I-A)X=0$的一个解。对于每一个特征值λ_j，称$(\lambda_j I-A)X=0$的解空间是属于λ_j的**特征子空间**。

去求解特征值，实际上就是去求特征多项式的根。

零向量不是特征向量。

A的特征多项式$|\lambda I-A|$是λ的n次多项式，则λ^{n-k}的系数是A的所有k阶主子式之和乘$(-1)^k$。特别地，λ^n系数是1，λ^{n-1}系数是$-tr(A)$，常数项是$(-1)^n|A|$。

由韦达定理，知道$\Sigma\lambda_i=tr(A)$，$\Pi\lambda_i=|A|$。

相似的矩阵有相同的特征多项式。反之则不然。

数域**K**的矩阵A相似于对角矩阵，我们称A可对角化，该对角矩阵称为A的**相似标准形**。A可对角化的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

6. 矩阵可对角化的条件

把可对角化的矩阵所有特征值对应的特征向量写成一个矩阵形式：$U=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$，则$U^{-1}AU=diag\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$。

特征子空间的维数（几何重数）≤根的重数（代数重数）；

不相等的根对应的特征向量线性无关。

n级矩阵A可对角化的充要条件是不同特征值特征子空间的维数之和为n。

如果n级矩阵A有n个不同的特征值，则A可对角化。

设$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$。若A的一个特征值为λ，对应的特征向量为α，那么$f(A)$对应的特征值为$f(\lambda)$，对应的特征向量为α。

由于相似矩阵的行列式相等，那么一个可对角化矩阵的行列式为其所有特征值的乘积。

对于一个复杂矩阵B，我们可以把它写成矩阵多项式$f(A)$的形式（A在数域K上是可对角化矩阵），再计算出A的特征值λ，随即知道B的特征值为$f(\lambda)$，再做乘积得出detB。

7. 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵正交相似于**实**对角矩阵，且不同特征值对应的特征向量两两正交。

实对称矩阵的所有特征值几何重数等于代数重数。

对于求$T^{-1}AT=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$中正交矩阵T的过程：

1) 确定特征多项式$|\lambda I-A|=0$的全部解；
2) 求出特征子空间的一组基，并施用Schmidt正交化；
3) 全部按列依次写出来得到T。注意λ与η的对应关系。

8. 一些特殊的矩阵公式（important！）

a. 行满秩矩阵满足$AA^-=I$，列满秩矩阵满足$B^-B=I$。

b. A是B的一个广义逆的充要条件是$rank(A)+rank(I_n-BA)=n$。

c. 幂等矩阵的秩等于它的迹。

d. AB与BA有着相同的非零特征值，且代数重数相同；若λ_0是AB的某个非零特征值，η是AB属于λ_0的特征向量，则Bη是BA属于λ_0的特征向量。特别地，若A、B都是n级矩阵，则AB与BA的特征多项式相同。

e. 矩阵A、$B\in M_n(F)$，则AB与BA的特征多项式相等。

f. 矩阵A可对角化，λ_i是A所有的特征值，则$|A|=\Pi\lambda_i$。

g. rank(A)=1，则矩阵A必有特征值tr(A)。
h. 可逆矩阵没有0特征值。
i. 实数多项式复根以共轭形式成对出现。
j. 实数域不相似，复数域也不相似；复数域相似，实数域也相似。

好题集萃：

类型1：有解条件与通解形式

1. 设A,B,C分别是数域K上的s×n,p×m,s×m矩阵，证明：矩阵方程$AX-YB=C$有解的充分必要条件是$C=AA^-C+CB^-B-AA^-CB^-B$；在有解时，它的通解为$X=A^-C+A^-ZB+(I_n-A^-A)W$，$Y=-(I_s-AA^-)CB^-+Z-(I_s-AA^-)ZBB^-$。其中Z和W分别是数域K上的任意s×p、n×m矩阵。

解：有解条件：
充分性：如果$C=AA^-C+CB^-B-AA^-CB^-B$，则$X=A^-C$，$Y=AA^-CB^--CB^-$是一个解。
必要性：设X、Y是一个解，则$AX-YB=C\Rightarrow AA^-AX-YBB^-B=C$
$\Rightarrow AA^-(AX-YB)+AA^-YB+(AX-YB)B^-B-AXB^-B=C$
$\Rightarrow AA^-C+CB^-B+AA^-YB-AXB^-B=C$
$\Rightarrow AA^-C+CB^-B+AA^-YBB^-B-AA^-AXB^-B=C$
$\Rightarrow AA^-C+CB^-B+AA^-(YB-AX)B^-B=C$
$\Rightarrow AA^-C+CB^-B-AA^-CB^-B=C$。
通解形式：通解是解：代入验证即可。
解是通解：1) $AX-YB=C\Rightarrow A^-AX-A^-YB=A^-C\Rightarrow X=X-A^-AX+A^-YB+A^-C$
$\Rightarrow X=A^-C+A^-YB+(I_n-A^-A)X$；满足X的通解形式；
2) $AX-YB=C\Rightarrow AX=YB+C$　　　$[\because AXB^-=AA^-AXB^-\therefore (I_s-AA^-)AXB^-=0]$
$\Rightarrow (I_s-AA^-)(YB+C)B^-=0\Rightarrow (I_s-AA^-)CB^-+(I_s-AA^-)YBB^-=0$
$\Rightarrow Y=-(I_s-AA^-)CB^-+Y-(I_s-AA^-)YBB^-$；满足Y的通解形式。

类型2：迹的运用

1. 设A是数域K上的n级矩阵，n≥2。证明：若A的秩为1且$A^2\neq0$，则A有一个非零特征值tr(A)，且0是A的n−1重特征值。

解：$|\lambda I-A|=\lambda^n-tr(A)\lambda^{n-1}=0\rightarrow\lambda=0$或tr(A)。$\because$rank(A)=1，则$A=\alpha\beta^T$，$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\beta^T\alpha A$，$\therefore\beta^T\alpha\neq0$，$tr(A)=tr(\alpha\beta^T)=tr(\beta^T\alpha)\neq0$。∴A有一个非零特征值tr(A)，且易知0是A的n−1重特征值。

2. 设A是复数域上的n级矩阵，$\lambda_1\lambda_2,\ldots,\lambda_n$是A的全部特征值，求A的伴随矩阵$A^*$的全部特征值。

解：法一：1) 若A可逆，则$\lambda_i\neq0$。进而$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\rightarrow A^*A\alpha_i=\lambda_iA^*\alpha_i\rightarrow|A|\alpha_i=\lambda_iA^*\alpha_i\rightarrow$

$\frac{|A|}{\lambda_i}\alpha_i=A^*\alpha_i$。$|A|=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$，$A^*$全部特征值为$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1},\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n,\cdots,\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$。

2) 若A不可逆，则必有某个$\lambda_n=0$。则由前面结论知$rank(A^*)\leq1$。
2.1) 当rank(A)=n−1时，$rank(A^*)=1$。由第1题结论，知A^*有个特征值为$tr(A^*)=A_{11}+A_{22}\ldots+A_{nn}$=A的特征多项式λ项的前系数的$(-1)^{n-1}$倍=(Vieta定理)=$\sum_{i=1}^{n}\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_n=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}$。所以$A^*$的特征值为$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}$,0 (n−1重)。
2.2) 当rank(A)≤n−2时，$rank(A^*)=0$。此时有且仅有特征值0(n重)。

法二：由前面结论，A相似于一个上三角矩阵，且该矩阵主对角元为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$。易证$A^*\sim B^*$($A\sim B\Rightarrow AP=PB\Rightarrow (AP)^*=(PB)^*\Rightarrow P^*A^*=B^*P^*\Rightarrow A^*\sim B^*$，P可逆)

直接计算B*得$A^*\sim\begin{pmatrix}\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ & \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n & \cdots & c_{2n}\\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\end{pmatrix}$。

∴A*的全部特征值为$\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{n-1},\lambda_1\lambda_3\ldots\lambda_n,\ldots,\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}$。

2. 设A、B是数域K上的n级矩阵，证明：如果AB−BA=C，且AC=CA，那么对一切正整数k，都有$tr(C^k)=0$。

解：对AB−BA=C两边取tr，得tr(C)=0。注意到$AC^k=CAC^{k-1}=C^2AC^{k-2}=\cdots=C^kA$。若$tr(C^k)=0$，则$tr(C^{k+1})=tr(C^kC)=tr(C^kAB)-tr(C^kBA)=tr(AC^kB)-tr(AC^kB)=0$。

类型3：数列通项

1. 设数列$\{a_k\}$满足下述递推公式：$a_{k+2}=\frac{1}{2}(a_{k+1}+a_k)$，k=0,1,2…，以及初始条件$a_0=0$，$a_1=\frac{1}{2}$。求这个数列的通项公式；并且求出$\lim\limits_{k\to+\infty}a_k$。（套路题）

解：构造$\beta_k=\begin{pmatrix}a_k\\a_{k-1}\end{pmatrix}$，有$\begin{pmatrix}a_k\\a_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{k-1}\\a_{k-2}\end{pmatrix}$。对矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}$对角化，得

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$\therefore\beta_k=PAP^{-1}\beta_{k-1}=PA^{k-1}P^{-1}\beta_1$，得出

$a_k=\dfrac{1-(-\frac{1}{2})^k}{3}$。$\therefore\lim\limits_{k\to+\infty}a_k=\frac{1}{3}$。

类型4：矩阵多项式的运用

1. 设A是复数域上的n级可逆矩阵，证明：如果$A\sim A^k$，其中k是大于1的正整数，那么A的特征根都是单位根。

解：设λ是A的一个特征根，则λ^k是A^k的一个特征根。∵$A\sim A^k$，∴λ^k也是A的一个特征根，从而知λ^{k^2}也是A的一个特征根，进而λ^{k^l}都是A的特征根。由于n级矩阵最多有n个特征值，故存在m≠n，s.t. $\lambda^{k^m}=\lambda^{k^n}$从而$\lambda^{k^m-k^n}=1$。即λ是单位根。

2. 设B是2n级实矩阵，满足$B^2=-I$。证明：存在2n级实可逆矩阵P，使得

$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&I_n\\-I_n&0\end{pmatrix}$。

解：考察矩阵多项式$|\lambda I-B|=0$。$B^2=-I$，知$\lambda^2=-1$，$\lambda=\pm i$。实多项式的复根以共轭形式成对出现，∴$|\lambda I-B|$有n重解i和n重解−i。由于rank(iI−B)+rank(iI+B)=rank(I+Bi)+rank(I−Bi)=(分块矩阵法)=n+rank(I^2+B)=n，从而$B\sim diag\{iI_n,-iI_n\}$。

Because $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

and $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, then，根据公式j，$B\sim\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$在实数域上也成立。故存在可逆矩阵

we can conclude that $B\sim\begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$。P，s.t. $P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$。

类型5：基的扩充

1. 任意n阶复矩阵一定相似于上三角矩阵。

解：利用归纳法。n=1 trivial。假设n=k时成立。当n=k+1时，设复矩阵A的一个特征值为λ_1，对应的一个特征向量为α_1。将α_1扩充成C^{k+1}的一组基$(\alpha_1,\beta_1,\dots\beta_n)$，记$T_1=(\alpha_1,\beta_1,\dots\beta_n)$。

$\therefore T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$。由于D是k级矩阵，根据归纳假设，D相似于上三角矩阵。

记$T_2^{-1}DT_2=F$，其中F是上三角矩阵。则$\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{pmatrix}$；

另记$T=T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$，则$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & F \end{pmatrix}$为上三角矩阵。命题得证！

类型6：|λI−A|的形式

1. 设A、B都是数域K上的n级矩阵，证明：AB与BA的特征多项式相等。

解：考察特征多项式|λI−AB|与|λI−BA|的λ^k前的系数。

$|\lambda I-AB|_k=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} AB\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k \\ i_1,\cdots,i_k \end{pmatrix}=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le v_1<\cdots<v_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k \\ v_1,\cdots,v_k \end{pmatrix}B\begin{pmatrix} v_1,\cdots,v_k \\ i_1,\cdots,i_k \end{pmatrix}=$

$\sum_{1\le v_1<\cdots<v_k\le n}\sum_{1\le i_1<\cdots i_k\le n} B\begin{pmatrix} v_1,\cdots,v_k \\ i_1,\cdots,i_k \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k \\ v_1,\cdots,v_k \end{pmatrix}=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_k\le n} BA\begin{pmatrix} v_1,\cdots,v_k \\ v_1,\cdots,v_k \end{pmatrix}=|\lambda I-BA|_k$。

2. 设A是数域K上的n级矩阵，n≥2，证明：若A的秩为1且$A^2\neq0$，则A有一个非零特征值tr(A)，且0是A的n−1重特征值。

解：0是A的n−1重特征值由rank(A)=1立得。

下证：tr(A)是A的特征值。考察特征多项式|λI−A|的λ^k前的系数。由于rank(A)=1，∴A的大于1阶的子式均为0，故$\lambda^{n-2},\dots,\lambda^1,\lambda^0$前的系数均为0，$\lambda^{n-1}$前的系数为tr(A)，∴tr(A)是一个特征值。又因为rank(A)=1，知$A=\alpha\beta^T$，$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T=tr(A)\alpha\beta^T$。∵$A^2\neq0$，∴$tr(A)\neq0$。结论得证。

3. 设A是数域K上的n级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$是A的特征多项式的全部复根。令

$G=\begin{pmatrix} A & A^m \\ A^m & A \end{pmatrix}$，其中m是正整数。求G的特征多项式的全部复根。

解：$|\lambda I-G|=\begin{vmatrix}\lambda I-A & -A^m\\ -A^m & \lambda I-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I-A-A^m & -A^m\\ \lambda I-A+A^m & \lambda I-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I-A-A^m & -A^m\\ 0 & \lambda I-A+A^m\end{vmatrix}=$

$|\lambda I-A-A^m||\lambda I-A+A^m|=0$，∴G的全部特征值为$\lambda_i\pm\lambda_i^m$，$i=1,2,\ldots,n$。

类型7：正交投影

1. 设A是实数域上m×n矩阵，m＞n。$\beta\in R^n$。证明：如果A是列满秩矩阵，那么线性方程组AX=β的最小二乘解唯一，它等于$(A^TA)^{-1}A^T\beta$；这也是A的一个广义逆。

解：设A的列向量组为$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$。设A的列向量组张成的空间为U。AX=β的最小二乘解是$X_0 \Leftrightarrow |\beta-AX_0|\le|\beta-AX| \Leftrightarrow \beta-AX_0\in U^{\perp} \Leftrightarrow \alpha_i^T(\beta-AX_0)=0 \Leftrightarrow A^T(\beta-AX_0)=0$ $\Leftrightarrow A^TAX_0=A^T\beta \Leftrightarrow X_0=(A^TA)^{-1}A^T\beta$。容易验证$(A^TA)^{-1}A^T$是A的一个广义逆。

类型8：矩阵性质的推广

1. 证明：实数域上的斜对称矩阵的特征多项式在复数域中的根是0或纯虚数。

解：把A看成复数域上的矩阵。设$A\alpha=\lambda_0\alpha$；两边取共轭得$A\overline{\alpha}=\overline{\lambda_0}\overline{\alpha}$，两边左乘$\alpha^T$得$\alpha^T A\overline{\alpha}=\overline{\lambda_0}\alpha^T\overline{\alpha}$；两边取转置得$-\alpha^T A=\lambda_0\alpha^T$，两边右乘$\overline{\alpha}$得$-\alpha^T A\overline{\alpha}=\lambda_0\alpha^T\overline{\alpha}$。∴$(\overline{\lambda_0}+\lambda_0)\alpha^T\overline{\alpha}=0\Rightarrow\overline{\lambda_0}+\lambda_0=0\Rightarrow\lambda_0$为0或纯虚数。

2. 设A是实数域上的n级斜对称矩阵。证明：$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}\geqslant 4^n$；当且仅当A=0时取等号。

解：根据矩阵初等行列变换，知$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}=4^n|I_n-\frac{1}{4}A^2|$。根据上题，可设A的全部特征值为$b_ki(k=1,2,\cdots,n)$，则$A^2$的全部特征值为$-b_k^2$。从而$I_n-\frac{1}{4}A^2$的全部特征值为$(1+\frac{1}{4}b_k^2)$，即$|I_n-\frac{1}{4}A^2|=\Pi(1+\frac{1}{4}b_k^2)\geqslant 1$，∴$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}\geqslant 4^n$，取等号条件为$b_k=0$，即A=0时。

本章重点：

1. 相抵等价类
2. 相似等价类
3. ★★★实对称矩阵可对角化(与合同联系)

高等代数第六章 二次型，矩阵的合同

重要概念：

1. 二次型和它的标准型

双线性函数：$f(\alpha,\beta)$=X^TAY= $\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_iy_j$ ，其中A∈M_n(F)。函数满足：任意固定一个变量，关于另一个变量的函数是线性的。易知$f:V\times V\to$F。固定V中的一组基：($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$)，则$a_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)$。即固定了$V$中的基后，$f$与A形成一一对应。

矩阵的合同：同一个f在不同基下的对应矩阵A之间合同。即称矩阵A与B合同，当且仅当存在可逆矩阵C，s.t.C^TAC=B。合同矩阵记做$A\simeq B$。

容易知道矩阵的合同是一个等价类，满足自反性、对称性、传递性。

二次型：双线性函数$\alpha=\beta$时，即$f(\alpha,\alpha)$=X^TAX。规定$q_f(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$。

容易知道$q_f(\alpha)=\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j, a_{ij}=a_{ji}$。其中$\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，A=($a_{ij}$)。

在F^n空间的某个fixed基下：**一个二次型对应一个对称矩阵，一个对称矩阵对应一个二次型。**

两个二次型等价⇔ $X^TAX=Y^TBT$，X=CY⇔ C^TAC=B⇔ 矩阵A、B合同

其中X=CY称作非退化线性替换/可逆线性变换；特别地，如果C是正交矩阵，则称为正交替换。

二次型X^TAX一定等价于只含平方项的二次型，称为标准型⇔

数域K上的对称矩阵A一定合同于对角矩阵，称为合同标准型。

常用方法：配方法(含有平方项)；增加平方项法(不含有平方项)。

成对初等行、列变换：**成对行列变换后的新矩阵与原矩阵合同**。

1°：j行k倍加到i行上~j列k倍加到i列上；

2°：i、j行互换~i、j列互换；　　　　3°：i行×k~j行×k。

求合同标准型的另一种方法：$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}I\text{只作其中的初等列变换}]{\text{对}A\text{作成对初等行、列变换}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$。其中D是合同标准型，C是使得$C^TAC$=D成立的可逆矩阵。

二次型的秩：X^TAX的标准型中系数不为0的平方项个数r，即rank(A)。

2. 实二次型的规范形

规范形：只含平方项，且平方项的系数为1，−1，0；系数为1的平方项写在前面。

惯性定理：n元实二次型X^TAX有且仅有唯一的规范形。

正(负)惯性指数：系数为+1(−1)的平方项数目$p(q)$。

符号差：+1的平方项数目减去−1的平方项数目$2p-r$。

两个n元实二次型等价⇔ 它们的秩相等，正惯性指数相同。

3. 正定二次型与正定矩阵

称**实对称**矩阵A$\begin{cases} \text{正定} \\ \text{半正定} \\ \text{负定} \\ \text{半负定} \end{cases}$，当且仅当A的$\begin{cases} p=n \\ p=r, r=rank(A)<n \\ q=n \\ q=r, r=rank(A)<n \end{cases}$。其余称A不定。

判定**实对称**矩阵A正定的等价条件：
1. A合同于I_n；2. $X^TAX\geqslant 0$，取等号条件X=0；3. A所有特征值都是正数；
4. 所有顺序主子式＞0； 5. 所有主子式＞0。
正定矩阵A的一些性质：
1. 存在可逆矩阵C，s.t. $A=C^TC$；
2. A可逆且A^{-1}正定；A^k正定；
3. 正定矩阵+半正定矩阵仍是正定矩阵；
4. 矩阵$P\in M_{m\times n}$列满秩，则P^TAP正定(m阶矩阵)。
类似定义正定二次型。

4. 一些特殊的矩阵公式（important！）

a. n级实对称矩阵的特征值根据大小顺序排列为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则$\lambda_n\le\dfrac{\alpha^TA\alpha}{\|\alpha\|^2}\le\lambda_1$；

b. 实对称矩阵作成对行列变换不改变其对称性；
c. 若A是实对称矩阵，则C^TAC仍是实对称矩阵；

d. A_1可逆，则实对称矩阵$\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2^T & A_4\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}$；

e. $M=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & D\end{pmatrix}$是正定矩阵，则$|M|\leqslant|A||D|$。

好题集萃：

类型1：数学归纳法
1. 证明：数域K上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵：

$$diag\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}。$$

解：对矩阵的级数使用数学归纳法。n=1、2时显然成立。
假设对于小于n级的斜对称矩阵均成立。

情形1 A的左上角的2级子矩阵$A_1\neq 0$，则A_1可逆。把A分块：$\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2^T & A_4\end{pmatrix}$。

此时$\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2^T & A_4\end{pmatrix}\xrightarrow{2+1\times(A_2^TA_1^{-1})}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}\xrightarrow[2+1\times(-A_1^{-1}A_2)]{}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}$

即$\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ A_2^TA_1^{-1} & I_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2^T & A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2 & -A_1^{-1}A_2\\ 0 & I_{n-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}$。

$\because\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ A_2^TA_1^{-1} & I_{n-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_2 & -A_1^{-1}A_2\\ 0 & I_{n-2}\end{pmatrix}^T$，$\therefore\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2^T & A_4\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}$。

由于A_1和$A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2$都是斜对称矩阵，下面易证。
情形2 $A_1=0$但是在A的第1/2行有a_{1j} / $a_{2j}\neq 0$。

作成对行列变换：把第j行加到第2/1行，把第j列加到第2/1列上，回到情形1。

情形3 $A_1=0$且$A_2=0$。此时A=$\begin{pmatrix}0&0\\0&A_4\end{pmatrix}$，作成对行列变换把$A_4$移到左上角，回到n−2的情形。

综合以上3种情形，由数学归纳法知原式成立。

类型2：同乘划归法

1. 设A,B都是n级实对称矩阵，并且AB=BA。证明：存在一个n级正交矩阵T，使得T^TAT与T^TBT都为对角矩阵。

解：实对称矩阵正交相似于对角矩阵，故设$T_1^TAT_1=diag\{\lambda_1 Ir_1,\cdots,\lambda_n Ir_n\}$($T_1$是正交矩阵)，此时$T_1^TABT_1=(T_1^TAT_1)T_1^TBT_1=T_1^TBAT_1=T_1^TBT_1(T_1^TAT_1)$。由于$T_1^TAT_1$是对角矩阵，易知$T_1^TBT_1=diag\{B_1,\cdots,B_n\}$,其中$B_i$是$r_i$级矩阵，且是实对称矩阵。不妨设$H_i^TB_iH_i$是对角矩阵($H_i$是正交矩阵)。则记T=$T_1\begin{pmatrix}H_1&&&\\&H_2&&\\&&\ddots&\\&&&H_n\end{pmatrix}$。

则T^TAT=$\begin{pmatrix}H_1^T&&&\\&H_2^T&&\\&&\ddots&\\&&&H_n^T\end{pmatrix}T_1^T A\, T_1\begin{pmatrix}H_1&&&\\&H_2&&\\&&\ddots&\\&&&H_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{r_1}&&&\\&\lambda_2 I_{r_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n I_{r_n}\end{pmatrix}$；

$T^TBT=diag\{H_1^TB_1H_1,\cdots,H_n^TB_nH_n\}$。∴$T^TAT$和$T^TBT$均是对角矩阵。

2. A为n级正定矩阵，B为n级半正定矩阵，B≠0。证明：|A+B|⩾max{|A|,|B|}。

解：A+B仍是正定矩阵，故|A+B|＞0=|B|。下证|A+B|＞|A|。

引理：存在可逆矩阵C，s.t.C^TAC和C^TBC均为对角矩阵。

证明：设$C_1^TAC_1=I$，则$C_1^TBC_1$是实对称矩阵。故存在正交矩阵T，s.t.$T^TC_1^TBC_1T$为对角矩阵。取$C=C_1T$，则$C^TAC=I$，$C^TBC=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(记为F)，其中$\lambda_i$⩾0。

回到原题。记$C^{-1}=D$，则$A=D^TID$，$B=D^TFD$。此时$|A+B|=|D^T(I+F)D|=|D^T||I+F||D|$＞$|D^T||I||D|=|D^TID|=|A|$。故|A+B|＞|A|。命题得证。（此题应当成一个结论！）

类型3：正定矩阵的判定条件

1. 证明：n级实对称矩阵A是半正定的充要条件为A的所有主子式全非负。

解：必要性：A半正定⇒ $A=C^T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}C$。将矩阵C分块：$\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$。

则A=$\begin{pmatrix}A_1^TA_1&A_1^TA_2\\A_2^TA_1&A_2^TA_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^T\\A_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&A_2\end{pmatrix}$。记$(A_1\ A_2)$为矩阵D，则$A=D^TD$。

$$\therefore A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_s\\i_1,\cdots,i_s\end{pmatrix}=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n}D^T\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_s\\v_1,\cdots,v_s\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}v_1,\cdots,v_s\\i_1,\cdots,i_s\end{pmatrix}=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n}D\begin{pmatrix}v_1,\cdots,v_s\\i_1,\cdots,i_s\end{pmatrix}^2\geqslant 0。$$

充分性：A的所有主子式均非负，考虑|λI−A|=0，有$\lambda^n-\Sigma A_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|=0$，其中$A_i$表示A的所有i阶主子式之和，且$A_i$⩾0。当λ为复数时，这些项不是0，就是和$\lambda^n$正负性相同。∴该方程无负数解，所有特征值均非负(注：此时应考虑特征

多项式是否有n个实数解。由于A实对称，故一定有n个实数解)，即A半正定。
2. 如果A,B均正定，且AB=BA，则AB也正定。
解：由前面结论，存在正交矩阵T，s.t. T^TAT和T^TBT均是对角矩阵。设$T^TAT=D_1$，$T^TBT=D_2$，则$A=TD_1T^T$，$B=TD_2T^T$，且D_1,D_2对角元均正。此时$AB=TD_1D_2T^T$，∴ AB合同于一个对角元均正的对角矩阵，故AB正定。

类型4：还原矩阵

1. 设A是n级可逆实对称矩阵，α是R^n中的一个列向量，令$B=A-\alpha\alpha^T$。用s(A)、s(B)分别表示A、B的符号差。证明：当$\alpha^TA^{-1}\alpha>1$时，s(A)=s(B)+2；当$\alpha^TA^{-1}\alpha<1$时，s(A)=s(B)。

解：考察矩阵$\begin{pmatrix}1 & \alpha^T\\ \alpha & A\end{pmatrix}$的合同等价类。由公式d，知$\begin{pmatrix}1 & \alpha^T\\ \alpha & A\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1-\alpha^TA^{-1}\alpha & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$；

再对该矩阵做成对行列变换，知$\begin{pmatrix}1 & \alpha^T\\ \alpha & A\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A-\alpha\alpha^T\end{pmatrix}$。

$\therefore\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1-\alpha^TA^{-1}\alpha & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$。以下trivial。

类型5：矩阵变换

1. A是正定矩阵，证明：唯一存在正定矩阵C，s.t. $A=C^2$。
解：存在性：A是实对称矩阵，正交相似于对角矩阵。记$A=T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_i\}T$，则$T^{-1}\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_i}\}T$，则$A=C^2$。

唯一性：假设$A=B^2=C^2$。设B的全部特征值为$\{\lambda_i\}$，C的全部特征值为$\{\mu_i\}$。由于A的特征值为$\{\lambda_i^2\}$和$\{\mu_i^2\}$，故可做适当调换s.t. $\lambda_i^2=\mu_i^2$。因为∴$\lambda_i,\mu_i\geqslant0$，∴$\lambda_i=\mu_i$。
∴存在正交矩阵T和H，s.t. $B=T^{-1}\mathrm{diag}\{\mu_i\}T$，$C=H^{-1}\mathrm{diag}\{\mu_i\}H$。
根据$B^2=C^2$有$T^{-1}\{\mu_i^2\}T=H^{-1}\{\mu_i^2\}H$，即$HT^{-1}\{\mu_i^2\}=\{\mu_i^2\}HT^{-1}$。记$(HT^{-1})=(t_{ij})$，观察两边的(i;j)元知$t_{ij}\mu_j^2=\mu_i^2t_{ij}$。如果$t_{ij}\neq0$，则$\mu_i=\mu_j$ then $t_{ij}\mu_j=\mu_it_{ij}$；如果$t_{ij}=0$，亦有$t_{ij}\mu_j=\mu_it_{ij}$。此时$HT^{-1}\{\mu_i\}=\{\mu_i\}HT^{-1}$，即$T^{-1}\mathrm{diag}\{\mu_i\}T=H^{-1}\mathrm{diag}\{\mu_i\}H$，B=C。
2. A,B正定，C正交，A=BC，证明：C=I。
解：充分利用C是正交矩阵的条件。$C=B^{-1}A$，$(BC)^T=A^T\Rightarrow C^T=AB^{-1}$。
$C^TC=I\Rightarrow AB^{-1}B^{-1}A=I\Rightarrow A^2=B^2$。∵$A^2/B^2$亦正定，由上题结论知A=B。又∵A,B均是满秩矩阵，∴C=I。

本章重点：

1. 化二次型为标准型
2. ★★★★实二次型/对称矩阵的合同分类(规范型，取值问题，正交代换)
3. 正定矩阵