第四章 导数与微分

基础概念：

$f'=\frac{d}{dx}f;df=f'dx$；

$(f+g)'=f'+g';(f-g)'=f'-g';(fg)'=f'g+g'f;(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

$d(f+g)=df+dg;d(f-g)=df-dg;d(fg)=gdf+fdg;d\frac{f}{g}=\frac{gdf-fdg}{g^2}$

$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{f'(x)};[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$

$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\Rightarrow y_x'=\frac{y'(t)}{x'(t)};r=r(\theta)\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$

对于形如 F(x,y)=0 的隐函数的求导，我们可以将 y 看成是 y=y(x)，直接对原方程求导。比如 $(x^2)'=2x$；$(y^2)'=2yy'$。

$dy=f'(u)du,u$可以是因变量。这就是一阶微分的形式不变性。

Leibniz 公式：$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}$。可以利用该公式直接**暴展**或写出**递推公式**。

典型例题：

题组 1：概念与$\varepsilon-N$ 语言

1. 设函数 $f(x)$ 在(a,b)上有定义，且在点 $x_0\in(a,b)$处可导，并假定序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足

$$a<x_n<x_0<y_n<b,\ n=1,2,\cdots\cdots,$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0=\lim_{n\to\infty}y_n$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)。$$

解：$\because\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}=f'(x_0),$

$\therefore$对$\forall\varepsilon,\exists N_1\in\boldsymbol{N}^+,\forall n>N_1,\ s.t.|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)|<\varepsilon;$

对 $\forall\varepsilon,\exists N_2\in \boldsymbol{N}^+,\forall n>N_2,\ s.t.|\dfrac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)|<\varepsilon;$

取定 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，上述两个不等式同时成立。

因此我们有

$$|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(x_0)|=|\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}+\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)|$$

$$=|\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}[\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)]+\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}[\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)]|$$

$$\le|\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}||\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)|+|\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}||\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)|$$

$<\dfrac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\varepsilon+\dfrac{x_0-x_n}{y_n-x_n}\varepsilon=\varepsilon$ 。 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在[-1,1]上有定义，且 $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n^2})-nf(0)]$ 。

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{i}{n^2})-f(0)}{\frac{i}{n^2}-0}=f'(0)$， $i=1,2,\cdots,n$ ；

$\therefore \forall\varepsilon,\exists N,\forall n>N,s.t.\left|\dfrac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}-f'(0)\right|<\varepsilon.$ ($0<\dfrac{i}{n^2}\le\dfrac{1}{n}$ ，此式对其他极限成立)

即 $\dfrac{i}{n^2}[f'(0)-\varepsilon]\le f(\dfrac{i}{n^2})-f(0)\le\dfrac{i}{n^2}[f'(0)+\varepsilon],\ i=1,2,\cdots,n$ 。

又 $\because \sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n^2})-nf(0)=\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\dfrac{i}{n^2})-f(0)]$ ；

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}[f'(0)-\varepsilon]\le\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\dfrac{i}{n^2})-f(0)]\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}[f'(0)+\varepsilon]$ 。同时求极限，得

$\dfrac{1}{2}[f'(0)-\varepsilon]\le\lim\limits_{n\to\infty}[\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n^2})-nf(0)]\le\dfrac{1}{2}[f'(0)+\varepsilon]$ 。

由 ε 的任意性知答案为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$ 。

题组 2：微分导数的对象

1. 设函数 $y=f(x)$ 是严格单调的三阶可导函数，而且 $f'(x)\ne0$ ，求 $(f^{-1})^{(3)}(y)$ 。

解：根据反函数导数公式有 $f^{-1}(y)'=\dfrac{1}{f'(x)}$。对等式两边求导，得：

$f^{-1}(y)''=\dfrac{d}{dy}\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{f'(x)}\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{f'(x)}\left(\dfrac{1}{f'(x)}\right)'=\dfrac{-f''(x)}{f'(x)^3}$。再求一次导，得：

$f^{-1}(y)'''=\dfrac{d}{dy}\dfrac{-f''(x)}{f'(x)^3}=\dfrac{1}{f'(x)}\dfrac{d}{dx}\dfrac{-f''(x)}{f'(x)^3}=\dfrac{1}{f'(x)}\left(\dfrac{-f''(x)}{f'(x)^3}\right)'=-\dfrac{f'''(x)}{f'(x)^4}+\dfrac{3f''(x)^2}{f'(x)^5}$。

题组 3：数学归纳法

1. 求证：若 $y=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$，则 $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$。

解：当 $n=1$ 时，显然成立。下面假设 $n=k$ 时 $y^{(k)}=\dfrac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$。

当 $n=k+1$ 时，欲证：$y^{(k+1)}=\dfrac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}$。我们直接对 y 求 $k+1$ 次导数：

$$y^{(k+1)}=(x\cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}x+C_{k+1}^1(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}x+(-1)^k(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

对 $n=k$ 时的等式两边求一次导，知 $(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=(-1)^{k+1}\left(\dfrac{1}{x^{k+3}}e^{\frac{1}{x}}+(k+1)\dfrac{1}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}\right)$。

代入上式，得：（$n=k+1$ 的情形）

$$y^{(k+1)}=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}+(-1)^{k+1}(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+(-1)^k(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有任意阶导数。证明：对任意正整数 n 都有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}(\frac{1}{x})=(-1)^n\left(x^{n-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(n)}。$$

解：当 $n=1$ 时，有 $(-1)[f(\dfrac{1}{x})]'=\dfrac{1}{x^2}f'(\dfrac{1}{x})$ 成立。

利用数学归纳法，假设 $n=k$ 时等式成立。则当 $n=k+1$ 时，我们欲证：

$\dfrac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-1)^{k+1}\left(x^kf(\dfrac{1}{x})\right)^{(k+1)}$。观察等式右边：$(-1)^{k+1}\left(x^kf(\dfrac{1}{x})\right)^{(k+1)}$

$$=(-1)^{k+1}\left(x\cdot x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}=(-1)^{k+1}x\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}+(-1)^{k+1}C_{k+1}^1\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k)}\quad（*）$$

我们继而对 $n=k$ 时的等式左右求导，知：

$\frac{1}{x^{k+1}}\frac{-1}{x^2}f^{(k+1)}(\frac{1}{x})+(-k-1)\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k)}(\frac{1}{x})=(-1)^k\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}$。化简得：

$(-1)^{k+1}x\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}=\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x})+(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}(\frac{1}{x})$。代入（*）式，有：

$$(-1)^{k+1}\left(x^k f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}=\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x})+(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}(\frac{1}{x})+(-1)^{k+1}(k+1)\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k)}$$

再利用$n=k$时的等式：$\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}(\frac{1}{x})=(-1)^k\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k)}$，$\therefore (-1)^{k+1}\left(x^k f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}$

$$=\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x})+(-1)^k(k+1)\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k)}+(-1)^{k+1}(k+1)\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k)}=\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x}).$$

特别提醒：$f^{(n)}(\frac{1}{x})\neq[f(\frac{1}{x})]^{(n)}$.前者表示的是先对$f$求$n$次导再用$\frac{1}{x}=x$代入，后者表示先用$\frac{1}{x}=x$代入再求$n$次导。

题组 4：*Leibniz* 暴展

1. 对$y=(\arctan x)^2$计算$y^{(n)}(0)$。

解：我们需要先知道函数$z=\arctan x$的$z^{(n)}(0)$。

$z'=\frac{1}{1+x^2}$，得$z'(1+x^2)=1$。两边同时求$n-1$阶导数，施用 *leibniz* 公式，得：

$(1+x^2)z^{(n)}+C_{n-1}^1 2xz^{(n-1)}+C_{n-1}^2 2z^{(n-2)}=0.$将$x=0$代入，得：

$z^{(n)}+(n-1)(n-2)z^{(n-2)}=0$。易知$z'(0)=1,z''(0)=0$，利用递推，知道

$$z^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^{k-1}(2k-2)! & n=2k-1\end{cases}。$$

下面我们来求$y^{(n)}(0)$。左右两边同时求n次导数，施用 *leibniz* 公式：

$$y^{(n)}(0)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\arctan x)^i(\arctan x)^{(n-i)}。$$

当$n=2k+1$时，循环和的每一项都含有一个奇数一个偶数，由上面结论知道$y^{(2k+1)}(0)=0$。

当$n=2k$时，消灭 0 项，将上式改写为

$$y^{(2k)}(0)=\sum_{i=1}^{k}C_{2k}^{2i-1}[(-1)^{i-1}(2i-2)!][(-1)^{k-i}(2k-2i)!]$$

$$=(-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{(2k)!}{(2i-1)!(2k-2i+1)!}(2i-2)!(2k-2i)!=(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i-1)(2k-2i+1)}$$

$$=(-1)^{k-1}(2k-1)!\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2i-1}+\frac{1}{2k-2i+1})=(-1)^{k-1}2(2k-1)!\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i-1}\text{。}$$

综上所述，$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k-1\\ (-1)^{k-1}2(2k-1)!(\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{2i-1}) & n=2k\end{cases}$。

2. 设 $f(x)=x^n\ln x,n\in\boldsymbol{N}_+$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}$。

解：直接对 $f(x)$ 施用 *leibniz* 暴展，得：

$\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}=g(n)-\ln n$，$g(n)$ 是关于 n 的一个多项式。

利用数学归纳法证明 $g(n)$ 是调和级数即可。

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}=\gamma$（欧拉常数）。

题组 5：拆项找规律

1. 设 $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，计算 $y^{(n)}(x),n\in\boldsymbol{N}_+$。

解：$\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}=\frac{x-1}{\sqrt{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{1-x}+\frac{2}{\sqrt{1-x}}$。直接求 n 次导知：

$$y^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & n=1\\ \frac{1}{2}(\prod\limits_{i=1}^{n-1}\frac{2i-1}{2})\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{2n-1}}}+2(\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2})\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{2n+1}}} & n\geq 2\end{cases}$$

题组 6：增项法（类似于数列通项公式）

1. 设 $y=(1+\sqrt{x})^{2n+2},n\in\boldsymbol{N}_+$，求 $y^{(n)}(1)$。

解：设 $z=(1-\sqrt{x})^{2n+2}$，则 $z^{(n)}(1)=0.$ 因此 $y^{(n)}(1)=(y+z)^{(n)}(1).$

$\because y+z=(1+\sqrt{x})^{2n+2}+(1-\sqrt{x})^{2n+2}=2x^{n+1}+2C_{2n+2}^{2}x^n+\cdots$(次数＜$n$的项)，

$\therefore(y+z)^{(n)}(1)=2(n+1)!+2C_{2n+2}^{2}n!=4(n+1)(n+1)!$。

题组 7：引入辅助函数

1. 证明：对于每个正整数 n，成立$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & 0 \le m \le n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$。

解：引入辅助函数 $f_m(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k k^m x^{k-1}$，求 $f_m(1)$。注意到 $f_{m+1}(x) = [xf_m(x)]'$ 和

$xf_0(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k x^k = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} x^k = (-1)^n (x-1)^n$。归纳知当 $0 \le m \le n-1$ 时，所求的导函数仍存在形如 $(x-1)^k$ 的项，故 $f_m(1) = 0$。当 $m = n$ 时，唯一不出现 $(x-1)^k$ 形式的项是 $(-1)^n [(x-1)^n]^{(n)} x^n = (-1)^n n! x^n$，此时 $f_n(1) = (-1)^n n!$。

陷阱易错：

1. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 的邻域内有 $n-1$ 阶导数，求 $f^{(n)}(a)$。

错误解法：两边直接求 n 次导得到 $f^{(n)}(a)$。

错误分析：$\varphi(x)$ 的 n 次导数不一定存在。

解：对 $f(x)$ 求 n-1 次导数得到

$f^{(n-1)}(x) = [(x-a)^n]^{(n-1)} \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [(x-a)^n]^{(n-1-k)} \varphi(x)^{(k)}$。注意到，在右边的循环和中，每一项都包含形如 $(x-a)^k (k \ge 2)$ 的项，且 $f^{(n-1)}(a) = 0$。

利用定义求出 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数：$f^{(n-1)}(a)' = \lim_{x \to a} \frac{n!(x-a)\varphi(a) + (x-a)^2 S(k,n)}{x-a}$，其中 $S(k,n)$ 表示关于 k 和 n 的一个多项式，且当 $x \to a$ 时不为无穷大量。

$\therefore f^{(n)}(a) = n!\varphi(a)$。

第五章 导数的应用

基础概念：

极值的定义：存在邻域，使得 $f(x_0)$ 最大（小）。

$Fermat$:极值点 $f'(x_0)$若存在，则 $f'(x_0)=0$。

$Rolle: f(x)\in C[a,b], f(x)\in D(a,b), f(a)=f(b),$ 则必存在 $f'(\xi)=0$。

广义 $Rolle: f(x)\in C[a,b], f(x)\in D(a,b), f(a+0)=f(b-0)=l$，$a=$有限数$or -\infty$，

$b=$有限数$or +\infty$， $l=$有限数$or \pm\infty$，则必存在 $f'(\xi)=0$。

$Lagrange: f(x)\in C[a,b], f(x)\in D(a,b),$ 则必存在 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

我们常常这样使用 $Lagrange$ 定理： $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$。

$Lagrange$ 推论： $f'(x)\equiv 0 \Leftrightarrow f(x)=C, f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)+g(x)+C$。

$Cauchy: f(x),g(x)\in C[a,b]\ and\ D(a,b); g'(x)\neq 0;$ 则必存在 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

$Darboux: f(x)\in D[a,b],\forall\eta\in[f_+(a),f_-(b)],\exists\xi,s.t.f'(\xi)=\eta.$ 即导函数具有中介值性质。换言而知，若 $f'(x)\neq 0$ 在区间 I 上恒成立，则必有 $f(x)$单调。

$L'Hospital(\dfrac{0}{0}):\lim\limits_x f(x)=\lim\limits_x g(x)=0; g'(x)\neq 0; \lim\limits_x\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l.$ 我们有 $\lim\limits_x\dfrac{f(x)}{g(x)}=l.$

$L'Hospital(\dfrac{*}{\infty}):\lim\limits_x g(x)=\infty; g'(x)\neq 0; \lim\limits_x\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l.$ 我们有 $\lim\limits_x\dfrac{f(x)}{g(x)}=l.$

$$Taylor_P: f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$+o\left((x-x_0)^n\right)(x\to x_0)$。前面的部分叫做 $Taylor$ 多项式，后面的叫做 $Peano$ 余项。

$$Taylor_L: f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\forall\xi\in(x_0,x)or(x,x_0)$。后面的叫做 $Lagrange$ 余项。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+[o(x^n)(x\to 0)/\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}].$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + [o(x^n) \quad (x \to 0) / \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + [o(x^{2n}) \quad (x \to 0) / \frac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + [o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0) / \frac{(-1)^{n+1} \cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + [o(x^n) \quad (x \to 0) / \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \cdots + C_\alpha^n x^n + [o(x^n) \quad (x \to 0) / C_\alpha^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}]$$

***Lagrange* 余项与 *Peano* 余项在运用上的主要区别是 *Lagrange* 便于计算具体数值，而 *Peano* 便于进行极限估计。**

根据导函数反推原函数：
$$f'(x) = a_1 + a_2 x + \cdots a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}) \quad (x \to 0) \Leftrightarrow$$
$$f(x) = f(0) + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n} x^n + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

Lagrange 插值多项式：$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$，其中 $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$。

其中误差函数 $R(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$。

特别提醒：$L_n(x)$实际上是用 $x_0,\cdots x_n$ **n+1 项**插值的结果！

设 $f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内 n 阶可导，$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，且 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则：

(1) 当 n 为奇数时，$f(x)$在点 x_0 不取极值；

(2) 当 n 为偶数时，$f^{(n)}(x)>0$ 时，$f(x)$在 x_0 处取严格极小值；

(3) 当 n 为偶数时，$f^{(n)}(x)<0$ 时，$f(x)$在 x_0 处取严格极大值。

（下）凸函数：$\forall t\in(0,1)$，成立 $f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$。

凸函数的充要条件是 1) $\forall x_1 < x_3 < x_2, \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \le \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$；

进而有凸函数在非端点处的左右导数一定存在，且满足 $f_-'(x)\leqslant f_+'(x)$。

2) $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$，$t_i>0$，则 $f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\leqslant t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)$。

若 $f(x) \in C[a,b], D(a,b)$，则 $f(x)$为凸函数的充要条件是 $f'(x)$单调上升。

若 $f(x) \in C[a,b], D^2(a,b)$，则 $f(x)$为凸函数的充要条件是 $f''(x)\geqslant 0$。

拐点：前凸后凹或前凹后凸。拐点处的二阶导数存在则必为 0。

渐近线：曲线与该直线的距离趋于 0。

典型例题：

题组 1：待定常数法（一种特殊的还原函数的方法）

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微， $f(a)=f(b)=0$ 。证明：对每个 $x\in(a,b)$ ，存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得成立 $f(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$ 。

解：固定 x ，我们设 $\dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}=\lambda$ ，往证 $\exists\xi\in(a,b),s.t.f''(\xi)=\lambda$ 。

构造 $F(t)=f(t)-\dfrac{\lambda}{2}(t-a)(t-b)$ ，知道 $F(a)=F(b)=F(x)=0$ 。

在 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上使用 *Rolle* 定理知道 $\exists\eta_1,\eta_2,s.t.F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$ 。

再在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上使用 *Rolle* 定理知道 $\exists\xi,s.t.F''(\xi)=f''(\xi)-\lambda=0$ ，即 $f''(\xi)=0$ 。

2. 设 $x_0\in I$，$x_0+h\in I$，$\lambda\in(0,1)$，$f(x)$在区间 I 上二次可微。证明：

$$\exists\theta\in(0,1),s.t.f(x_0+\lambda h)=\lambda f(x_0+h)+(1-\lambda)f(x_0)-\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}h^2f''(x_0+\theta h).$$

解：引入辅助函数 $F(t)=f(x_0+ht)-f(x_0+h)t-(1-t)f(x_0)+\dfrac{t(1-t)}{2}h^2s,t\in[0,1]$ ，

其中 $s=\dfrac{f(x_0+\lambda h)-\lambda f(x_0+h)-(1-\lambda)f(x_0)}{-\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{h^2}}$ 。

我们去证：$\exists\xi\in(x_0,x_0+h),s.t.f''(\xi)=s.$ 由于 $F(0)=F(1)=F(\lambda)=0$ ，

根据 *Rolle* 微分中值定理，$\exists\eta_1\in(0,\lambda),\eta_2\in(\lambda,1)s.t.F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$ ，

进而有 $\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),s.t.F''(\xi)=0$ 。惊讶地发现， $F''(\xi)=h^2[f(x_0+h\xi)-s]=0$

∴令 $\theta=\xi$ ，我们知道 $f''(\xi)=s$。结论得证！

3. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上三阶可导，证明：

$$\exists\xi\in[a,b],s.t.f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f^{(3)}(\xi).$$

解：引入辅助函数 $F(h)=f(a+h)-f(a)-\dfrac{1}{2}h[f'(a)+f'(a+h)]+\dfrac{1}{12}h^3s.$

其中 s 是使得 $f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\dfrac{1}{12}(b-a)^3s$ 成立的数。

我们去证明：$\exists\beta\in[a,b]$，$s.t.f(\beta)=s$ 成立。

∵$F(0)=F(b-a)=0$，∴$\exists\eta\in(0,b-a)$，$s.t.F'(\eta)=0$。

又因为 $F'(h)=\dfrac{1}{2}f'(a+h)-\dfrac{1}{2}f'(a)-\dfrac{1}{2}hf''(a+h)+\dfrac{1}{4}h^2s$ 在 $h=0$ 处取值为 0，

在$[0,\eta]$上使用 *Rolle* 定理知道$\exists\xi\in(0,\eta)$，$s.t.F''(\xi)=0$。

而 $F''(\xi)=\dfrac{1}{2}f''(a+\xi)-\dfrac{1}{2}f''(a+\xi)-\dfrac{1}{2}\xi f'''(a+\xi)+\dfrac{1}{2}\xi s=\dfrac{1}{2}\xi[s-f^{(3)}(a+\xi)]=0$

$\Leftrightarrow f^{(3)}(a+\xi)=s.$ 知道 $\exists\beta\in(a,b)s.t.f^{(3)}(\beta)=0.$

题组 2：广义 *Rolle* 定理

1. 证明：*Legendre* 多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$ 在 $(-1,1)$ 上内有 n 个不同实根。

解：我们应注意到，$x=\pm1$ 是 $P_n(x)$的 n 重零点。
$P_1(x)$在$[-1,1]$上有 $P_1(-1)=P_1(1)=0$。则 $P_2(x)=P_1'(x)$在$(-1,1)$上有零点，在 $x=\pm1$ 又是它的零点，合着有 3 个零点。利用相同方法递推下去。
容易验证，$P_k(\mathrm{x})$有 $k+2$ 个零点($1\leqslant k\leqslant n$)。当 $k=n$ 时，$x=\pm1$ 的零点不复存在，所以 $P_n(x)$有 n 个零点。

2. 证明：*Laguerre* 多项式 $L_n(x)=e^x(x^ne^{-x})^{(n)}$有 n 个不同正根。

解：记 $T_n(x)=(x^ne^{-x})^{(n)}$。显然 $L_n(x)$有 n 个不同正根等价于 $T_n(x)$有 n 个不同正根。
显然 $x=0$ 是 $T_n(x)$的 n 重零点。而当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^ne^{-x})^{(k)}=0$。
$T_0(x)$有两个**广义零点**(作者自己定义的，意为**无穷小量**)：0 和$+\infty$。
在$[0,+\infty)$上使用广义 *Rolle* 定理，知道 $T_1(x)$有 3 个广义零点。
剩余过程参考上题，我们知道 $T_n(x)$有 n 个**狭义零点**。

3. 证明：*Chebyshev-Hermite* 多项式 $H_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n!}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$ 有 n 个不同零点。

解：注意到$\pm\infty$是 n 重广义零点。套用 n 次广义 *Rolle* 定理即可。

题组 3：还原函数系列

1. 设 f,g 在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微，且导函数 g'在区间(a,b)上无零点。证明：

$$\exists\xi\in(a,b),s.t.\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

解：对结论通分，得到 $f'(\xi)g(\xi)+g'(\xi)f(\xi)-g(b)f'(\xi)-f(a)g'(\xi)=0.$ 引入函数：

$F(x)=f(x)g(x)-g(b)f(x)-f(a)g(x)+f(a)g(b)$，易见 $F(a)=F(b)=0$。在区间$[a,b]$上使用 *Rolle* 定理，知

$\exists\xi\in(a,b),s.t.F'(\xi)=f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)-g(b)f'(\xi)-f(a)g'(\xi)=0$。得证！

2. 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$。证明：$\exists\xi>0$，$s.t.\ f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$

解：引入还原后的函数 $F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$，在$[0,+\infty)$上使用广义 *Rolle* 定理，知

$\exists\xi\in(0,+\infty),s.t.f'(\xi)-\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}=0.$ 这就是原题欲证结论。

3. 设函数 f 在 a 处二阶可导，且 $f''(a)\neq0$,，则在 h 充分小时，成立 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)$，而且其中的$\theta$具有性质 $\lim\limits_{h\to0}\theta(h)=\frac{1}{2}$。

解：第一问：直接使用 *Lagrange* 定理。
第二问：我们提供两种方法。

法 1：因二阶导数存在，联想二阶导数的定义：$f''(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$。

我们发现：$[f(a+h)-f'(a)h]'_h=f'(a+h)-f'(a)$，$[h^2]'=2h$。如果前面这个式子再减去一个无关的常数项 $f(a)$，刚好又和前面的 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)$ 呼应！

故引入 $F(x)=f(a+x)-f(a)-f'(a)x, G(x)=x^2$. 我们有：

$$I=\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}=\frac{F(h)-F(0)}{h^2}=\frac{F'(\xi)}{2\xi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(a+\xi)-f'(a)}{\xi},\exists\xi\in(0,h)$$

又∵ $I=\dfrac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}=\dfrac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^2}=\theta\cdot\dfrac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}$

∴两边令 $h\to 0$，有 $\theta\to 1/2$。

法 2：对(1)等式两边使用 $Taylor_L$ 展开，得 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a+\theta_1 h)$；

$f'(a+\theta h)=f'(a)+\theta hf''(a+\theta_2\theta h)$。由 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)$ 知：

$2\theta f''(a+\theta_2\theta h)=f''(a+\theta_1 h)$，即 $\theta=\dfrac{f''(a+\theta_1 h)}{2f''(a+\theta_2\theta h)}$，∴ $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$。

注：此题可推广到 n 阶导数存在的情形，我们有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{n}}$。

4. 设 $f(x)\in D[a,b]$，$f(a)=f(b)$。证明：$\exists\xi,s.t. f(a)-f(\xi)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$。

解：我们先用 $f(a)=0$ 试一下。我们发现导函数前面的 x 系数高于原函数，此时引入 $F(x)=x^2f(x)$就能完美解决问题了。

类似地，我们引入函数 $F(x)=x^2[f(x)-f(a)]$。观察发现 $F(0)=F(a)=F(b)=0$。根据 *Rolle* 微分中值定理，我们知道导函数的零点夹在原函数零点之间。所以大胆消去导函数的 x，得到 $\exists\xi,s.t.F'(\xi)=\xi[2f(\xi)-2f(a)+\xi f'(\xi)]=0\Rightarrow f(a)-f(\xi)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$。

5. 设 f 在 R 上二阶连续可导，$|f(x)|\leqslant 1$，且有$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，证明：存在ξ，s.t. $f(\xi)+f''(\xi)=0$。

解：先由$|f(0)|\leqslant 1$ 知$|f'(0)|\geqslant\sqrt{3}$。引入函数 $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$，满足 $F(0)=4$ 且 $F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$。下面采用反证法：如果 $f(\xi)+f''(\xi)\neq 0$ 恒成立，由介值定理，知 $f(\xi)+f''(\xi)$在 R 上保号。不妨设 $f(\xi)+f''(\xi)>0$ 即 $f'(x)F'(x)>0$ 成立。

1.1) $f'(0)\geqslant\sqrt{3}$ 且 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上有零点的情形。设其最小的零点(这是由于函数的连续性，所以存在)为 x_1，此时对任意 $x\in(0,x_1)$有 $f'(x)>0$。则 $F'(x)>0$。

∴$1\geqslant[f(x_1)]^2=[f(x_1)]^2+[f'(x_1)]^2=F(x_1)>F(0)=4$，矛盾。

1.2) $f'(0)\geqslant\sqrt{3}$ 且 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上无零点的情形。则 $f'(x)>0$，进而 $F'(x)>0$。所以 $F(x)>F(0)=4$，$\forall x\in(0,+\infty)$。根据$|f(x)|\leqslant 1$ 知$|f'(x)|\geqslant\sqrt{3}$ 恒成立。这与$|f(x)|$

$\leqslant 1$ 显然矛盾！

其余情况类似考虑。知原命题成立。

题组 4： 凑 *or* 计算 *L'Hopsital.*

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有直到 n 阶导数，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A, \lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)=B$. 求证：$B=0$。

解： 构造 $\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{f(x)}{x^n}$，令 $x\to+\infty$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}=0\left(\because f(x)=O(1)\right)$ 和

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n} \xlongequal{n\text{次}L'Hospital} \lim_{x\to+\infty}\frac{f^n(x)}{n!}=\frac{B}{n!}.$$ 由极限的唯一性知 $B=0$。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k, k\in R\bigcup\{\pm\infty\}$. 求证：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=k.$$

解： 构造 $\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{e^x f(x)}{e^x}$，令 $x\to+\infty$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}=k.$

3. 计算 $\lim\limits_{x\to0+0} x^{x^x-1}$.

解： $$\lim_{x\to0+0} x^{x^x-1}=\lim_{x\to0+0} e^{(x^x-1)\ln x}=\lim_{x\to0+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}=\lim_{x\to0+0} e^{x\ln^2 x}=\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln^2 t}{t}}=\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{2\ln t}{t}}=1.$$

其中 $t=1/x$。

题组 5： *Taylor$_P$* 展开

【待定系数法】

1. 写出函数 $\dfrac{x}{\sin x}$ 在 $x=0$ 处的带有 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式。（展到 x^4）

解： 设 $\dfrac{x}{\sin x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4)\quad(x\to0).$

则 $x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4))\sin x\quad(x\to0)$

$$\Rightarrow x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4))(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6))\quad(x\to0)$$

$$\Rightarrow x=a_0x+a_1x^2+(a_2-\frac{a_0}{6})x^3+(a_3-\frac{a_1}{6})x^4+(a_4-\frac{a_2}{6}+\frac{a_0}{120})x^5+o(x^5)\quad(x\to0)$$

$$\Rightarrow a_0=1,a_1=0,a_2=\frac{1}{6},a_3=0,a_4=\frac{7}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin x}=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)\quad(x\to0)$$

【层层展开法】

2. 写出函数 *ln* (*cos x*+*sin x*) 在 $x=0$ 处的带有 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式。（展到 x^4）

解：先展开($\cos x+\sin x$)项。

$$\cos x+\sin x=1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$\because \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$\therefore \ln(\cos x+\sin x)=\ln\left(1+\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\right)\quad(x\to 0)$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^3}{3}$$

$$-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4}{4}+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$=x-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

【消项估计法】

3. 设函数$f(x)$、$g(x)$、$p(x)$具有连续二阶导数，计算极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x)\\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h)\\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h)\end{vmatrix}。$$

解：对$f/g/p(x+h)$、$f/g/p(x+2h)$进行 $Taylor_P$ 展开，并进行初等行列变换，得：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x)\\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h)\\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x)\\ f'(x) & g'(x) & p'(x)\\ f''(x) & g''(x) & p''(x)\end{vmatrix}。$$

题组 6：$Taylor_L$ 展开

【特殊点展开】（注意：以下两题是不同的展开法）

1. 设$f(x)$在[0,1]上二次可微，$f(0)=f(1)=0$，$\max\{f(x)\}=2$，证明：$\max\{f''(x)\}\geqslant -16$。

解：$\forall$ *fixed a*，利用 *Taylor* 公式将$f(x)$在 x 处展开，并代入 $x_0=0$、1，得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2,$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2。$$

再令$f(M)=2$，则$f'(M)=0$。代入上述两式，得：

$f''(\xi_1)=-\dfrac{4}{x^2},f''(\xi_2)=-\dfrac{4}{(1-x)^2}$。显然$\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}\geq -16$。命题得证！

2. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f'(a)=f'(b)=0$。证明：存在 $c\in(a,b)$，

s.t.$|f''(c)|\geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

解：利用 *Taylor* 公式将 $f(x)$在 $x=a$ 和 $x=b$ 处展开，得

$f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$，$f(x)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$。令$x=\frac{a+b}{2}$，有

$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$，$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$。联立，得

$$\frac{4}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\Rightarrow\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|=|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}|$$

$\Rightarrow\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\leq\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}$。由 *Darboux* 定理易知$|f''(x)|$也具有中介值性质。所以$\exists c\in(\xi_1,\xi_2),s.t.|f''(c)|=\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}$。题目得证！

【两头夹中间】

3. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上三阶可导，且$|f(x)|\leqslant M_0$，$|f'''(x)|\leqslant M_3$，$\forall x\in(0,+\infty)$。证明：$f'(x)$和$f''(x)$在$(0,+\infty)$上有界.

解：用 $Taylor_L$ 公式将$f(x+1)$和$f(x+2)$展开：

$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6}$；

$f(x+2)=f(x)+2f'(x)+\frac{4f''(x)}{2}+\frac{8f'''(\xi_2)}{6}$；

显然，$f'(x)$和$f''(x)$可以被$f(x)$、$f(x+1)$、$f(x+2)$、$f'''(\xi_1)$、$f'''(\xi_2)$线性表出。由于这组基有界，所以它们有界。

4. 设$f(x)$在 **R** 上有 n 阶导数，且存在实数α使得$\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f^{(n)}(x)=0$。

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f^{(k)}(x)=0$，$k=1,2,\cdots,n-1$。

解：用 $Taylor_L$ 公式将$f(x+1),\cdots,f(x+n)$展开：

$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}$；……

$f(x+n)=f(x)+nf'(x)+\cdots+\frac{n^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{n^n f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$。

由未知数组$(f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x))$组成的线性方程组行列式是 *Vandermonde* 行列式，不为 0，所以它们可以被$f(x+1),\cdots,f(x+n),f^{(n)}(\xi_1),\cdots,f^{(n)}(\xi_n)$线性表出。由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f(x+t)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+t)^\alpha f(x+t)=0,\forall t\in\{1,2,\cdots,n\}$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha f^{(k)}(x)=0$。

5. 设函数$f(x)\in C^2(0,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\exists$，$f''(x)=O(1)$。证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。

解：设$|f''(x)|\leqslant M$恒成立。$Taylor_L$展开，得$f(x+y)=f(x)+f'(x)y+\dfrac{f''(\xi)}{2}y^2$。

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{y}[f(x+y)-f(x)]-\dfrac{y}{2}f''(\xi)$。两边令$x\to+\infty$取上极限，得：

$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|=\dfrac{y}{2}M$。有$y$的任意性知道$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|=0$。$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$。

【造点展开法】

6. $f(x)\in C^2[a,b]$，$f''(x)<0$，$\forall x\in[a,b]$。证明：$\forall a\leqslant x_1<\cdots<x_n\leqslant b$，$k_l\geqslant 0$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=1$，有$f(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i)>\sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_i)$。

解：设$x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i$，利用$Taylor$公式展开$f(x_i)$：

$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\dfrac{f''(\xi_i)}{2}(x_i-x_0)^2<f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)$。

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_i)<\sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_0)+f'(x_0)\sum\limits_{i=1}^{n}k_i(x_i-x_0)=f(x_0)$。命题得证！

【综合运用】

7. (Berstein 定理)设f在(a,b)上任意阶可微，且对于每个n成立$f^{(n)}(x)\geqslant 0$。证明：对每个$x_0\in(a,b)$存在$r_0>0$，使得当$x\in[x_0-r_0,x_0+r_0]\subset(a,b)$时，成立

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

解：先证明：对于任意n阶导有$f^{(n)}(x)\leqslant\dfrac{2Mn!}{r^n}$。其中$M$是使得$|f(x)|\leqslant M$在区间$[x-r,x+r]\subset(a,b)$上恒成立的"界"。

$Taylor_L$展开得$f(x+r)=f(x)+f'(x)r+\dfrac{f''(x)r^2}{2!}+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x)r^n}{n!}+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)r^{n+1}}{(n+1)!}\Leftrightarrow$

$$2M\geq f(x+r)-f(x)=f'(x)r+\frac{f''(x)r^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)r^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)r^{n+1}}{(n+1)!}\geq\frac{f^{(n)}(x)r^n}{n!}$$

$\therefore f^{(n)}(x)\leqslant\dfrac{2Mn!}{r^n}$成立。

再证明原命题成立。只需证$g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k]=0$。

由于$f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}\leq\left|\dfrac{2M(x-x_0)^{n+1}}{r^{n+1}}\right|$。

只需取$r_0<r$。此时有$x-x_0<r$，当$n\to+\infty$时，$g(x)=0$成立。证毕！

第六章 不定积分

基础概念：

积分的概念：$F'(x)=f(x)$，则$\int f(x)dx=F(x)+C$。

特别提醒：$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$，结尾的常数 C 不要漏掉。

换元法：1) $\int f(u(x))u'(x)\,d\,x=\int f(u(x))\,d\,u(x)$；

2) $\int f(x)\,d\,x=\int f(g(t))\,d\,g(t)$。

分部积分法：$\int udv=uv-\int vdu+C$。

有理函数积分：最简**真分式**：$\frac{A}{x-a},\frac{A}{(x-a)^k},\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}(k>1)$

真分式的原函数：$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln(x-a)+C$；$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$；

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+\frac{Ap}{2}+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx$$

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+(B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}})+C；$$

$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$ 利用同样方法与分部积分知识写递推式。(注：I_k 写出来的是 I_k 与 I_{k+1} 的关系)

三角函数有理式积分：简化成有理函数积分：$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$。

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$；

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$；

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}}{2}+C\text{；}$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|}{2}+C\text{；}$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|}{2}+C\text{；}$$

典型例题：

类型 1：凑微法

1. 求$\int\frac{dx}{x(x^3+2)}$。

解：$\int\frac{dx}{x(x^3+2)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3(x^3+2)}=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+2}dx^3=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+2}\right|+C$。

2. 求$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$。

解：$\left(\frac{2+x}{2-x}\right)'=\frac{4}{(2-x)^2}$，$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-\frac{1}{3}}d\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}}+C$。

3. 求$\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$。

解：$\int x^2\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^4+x^2}dx^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}d(x^2+\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{16}\ln(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2})+C_1$

$=\frac{1}{8}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})^2+C\quad(C=C_1+\frac{\ln 2}{16})$

$=\frac{1}{8}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$

类型 2：分部积分法

1. 求$\int\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$。

解：$\int\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx\left(\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}de^x\right)+\int\frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$

$=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\int e^xd\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\int\frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$。

类型 3：大换元法

1. 求$\int\sqrt{\tan x}dx$。

解：法 1：$\int\sqrt{\tan x}dx \xrightarrow{u=\sqrt{\tan x}} \int ud\arctan u^2 = 2\int\frac{u^2}{1+u^4}du$。

记$I=\int\frac{u^2}{1+u^4}du, J=\int\frac{1}{1+u^4}du$。则

$$I+J=\int\frac{1+u^2}{1+u^4}du=\int\frac{\frac{1}{u^2}+1}{\frac{1}{u^2}+u^2}du=\int\frac{1}{(u-\frac{1}{u})^2+2}d(u-\frac{1}{u})=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}})+C_1\text{；}$$

$$I-J=\int\frac{u^2-1}{u^4+1}du=\int\frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}du=\int\frac{1}{(u+\frac{1}{u})^2-2}d(u+\frac{1}{u})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}}\right|+C_2\text{；}$$

$\therefore I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}})+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}}\right|+C$。将$u=\sqrt{\tan x}$代回：

$$\therefore\int\sqrt{\tan x}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}})+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right|+C\text{。}$$

法 2：记$P=\int\sqrt{\tan x}dx, Q=\int\sqrt{\cot x}dx$。则

$$P+Q=\int\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}dx=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx=\sqrt{2}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$=\sqrt{2}\arcsin(\sin x-\cos x)+C_1\text{；}$$

$$P-Q=\int\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x}dx=-\sqrt{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx=-\sqrt{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}}$$

$$=-\sqrt{2}\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}|+C_2=-\sqrt{2}\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}|+C_2$$

$$\therefore\int\sqrt{\tan x}dx=P=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sin x-\cos x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}|+C\text{。}$$

2. 求$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$。

解：$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \xrightarrow{u=x+\sqrt{x^2+x+1}} \int\frac{d(\frac{u^2-1}{2u+1})}{u}=2\int\frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2}du=2\int\frac{1}{u}-\frac{3(u+1)}{(2u+1)^2}du$

$=2\int\frac{du}{u}-3\int\frac{du}{2u+1}-3\int\frac{du}{(2u+1)^2}=2\ln u-\frac{3}{2}\ln(2u+1)+\frac{3}{2}\frac{1}{2u+1}$。将 u 代回：

$\therefore\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1|+\frac{3}{4x+4\sqrt{x^2+x+1}+2}$。

类型 4：待定系数法

1．求 $\int(\sqrt{x}-x)e^{2\arctan\sqrt{x}}dx$。

解： $\int(\sqrt{x}-x)e^{2\arctan\sqrt{x}}dx\xrightarrow{u=\sqrt{x}}\int(u-u^2)e^{2\arctan u}du^2=2\int(u^2-u^3)e^{2\arctan u}du$。

设 $\int(u^2-u^3)e^{2\arctan u}du=f(u)e^{2\arctan u}$，其中$u$是关于$u$的多项式函数。

则 $f'(u)+\frac{2f(u)}{1+u^2}=u^2-u^3$，即$(1+u^2)f'(u)+2f(u)=u^2-u^3+u^4-u^5$。

设 $f(u)=a_4u^4+a_3u^3+a_2u^2+a_1u+a_0$，则$f'(u)=4a_4u^3+3a_3u^2+2a_2u+a_1$。

则 $(1+u^2)f'(u)+2f(u)=4a_4u^5+(3a_3+2a_4)u^4+(4a_4+2a_3+2a_2)u^3+(3a_3+2a_2+a_1)u^2+(2a_2+2a_1)u+(a_1+2a_0)=-u^5+u^4-u^3+u^2$。

$\therefore a_4=-\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_2=-\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_0=-\frac{1}{4}$。

$\therefore\int(\sqrt{x}-x)e^{2\arctan\sqrt{x}}dx=(-\frac{1}{2}x^2+x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-\frac{1}{2})e^{2\arctan\sqrt{x}}$。