第七章 定积分

7.1 定积分的概念与微积分基本定理

Riemann 和：函数 f (x)在[a,b]上进行分割Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda(\Delta)=\max\{\Delta x_i\}$。每个小区间任取$\xi_i$作 Riemann 和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

定积分：f (x)在[a,b]上的 Riemann 和存在不依赖于Δ和ξ_i的极限 I（$\lambda(\Delta)\to 0$），

记 I=$\int_a^b f(x)dx$。同时称 f (x) Riemann 可积，记 f (x)∈R [a,b]。

几何意义：与 x 轴围成曲边梯形的矢量面积。

Newton-Leibniz：if f (x)∈R [a,b] and f (x) primitive function is F(x)，then

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$。（Lagrange 证明，沟通原函数导函数的桥梁）

粗细分：Δ'的所有分点都是Δ''的分点，称Δ''是Δ'的细分，Δ'是Δ''的粗分，记$\Delta'\subset\Delta''$。

7.2 可积性问题

可积性：连续函数可积；**可积函数有界**。

Darboux 和：对区间$[x_{i-1},x_i]$，取$M_i=\sup\{f(x)\}$，$m_i=\inf\{f(x)\}$，

作 Darboux 大和$\overline{S}(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$，Darboux 小和$\underline{S}(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$；

When λ(Δ) is becoming smaller, $\overline{S}(\Delta)$ $\underline{S}(\Delta)$ don't differ much.（if limit I exists）

振幅：Define $\omega_i=M_i-m_i=\sup\{|f(x')-f(x'')|\}$，$x',x''\in[x_{i-1},x_i]$。

∀ $\Delta'\subset\Delta''$，we can say $\overline{S}(\Delta'')\le\overline{S}(\Delta')$，$\underline{S}(\Delta'')\ge\underline{S}(\Delta')$，即细分使大不增小不减。

∀ Δ' and Δ''，we can say $\underline{S}(\Delta')\le\overline{S}(\Delta'')$，即∀ Darboux 小≤∀ Darboux 大。

上下积分：Define $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_{\Delta}\{\overline{S}(\Delta)\}$ (上积分)，$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_{\Delta}\{\underline{S}(\Delta)\}$ (下积分)。

Darboux 定理：f (x)**有界**，则 $\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\overline{S}(\Delta)=\overline{\int_a^b} f(x)dx$，$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\underline{S}(\Delta)=\underline{\int_a^b} f(x)dx$。

有界函数可积的充要条件是其上下积分相等。

类似地，我们得到三个等价命题： f (x)∈R [a,b] $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\Delta, s.t.\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists\Delta, s.t.\omega_i\ge\varepsilon$ 的小区间$[x_{i-1},x_i]$总长度≤δ。

重要结论：有界且只有有限个间断点的函数；单调函数 Riemann 可积。

Lebesgue 定理：有界函数 f (x)在[a,b]上可积的充要条件是

$\forall\varepsilon>0,\exists$开区间集$(x_i',x_i'')(i=1,2,\cdots), s.t.$间断点集$E\subset\bigcup_{i=1}^{+\infty}(x_i',x_i'')$ $and\ \forall n,\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i<\varepsilon.$

7.3 定积分的性质

线性性：$f(x),g(x)\in R[a,b],\alpha,\beta\in R\Rightarrow \alpha f(x)+\beta g(x)\in R[a,b], and$

$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$ 。

绝对值不等式：$f(x)\in R[a,b]\Rightarrow |f(x)|\in R[a,b], and\ |\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b |f(x)|dx$ 。

可加性：$a<c<b, then\ f(x)\in R[a,b]\Leftrightarrow f(x)\in R[a,c]\ and\ f(x)\in R[c,b]$；

$f(x)\in R[a,b], then\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 。

保序性：$f(x),g(x)\in R[a,b], f(x)\ge g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$ 。

乘积性：$f(x),g(x)\in R[a,b]\Rightarrow f(x)g(x)\in R[a,b]$ 。

Approximation of Step Functions and Continuous (Piecewise Linear) Functions：

$f(x)\in R[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists S.F.\ h(x), s.t.\int_a^b|f(x)-h(x)|dx<\varepsilon.$

$f(x)\in R[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists C.F.\ g(x), s.t.\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$

特别地，我们提供一个很重要但课本上并没有以定理形式给出的积分性质：
任何的可积函数 f (x)必有连续点；它的任意子区间可积，从而任意子区间必有连续点；换言而之，回到 Lebesgue 定理：可积函数在区间上几乎处处连续。

7.4 原函数的存在性与定积分的计算

变限积分：$f(x)\in R[a,b]$, 令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 。称 F(x)是 f (x)的一个变上限积分。

定理：$f(x)\in R[a,b]\Rightarrow F(x)\in C[a,b]; f(x)\in C[a,b]\Rightarrow F(x)\in D[a,b]$, 且$F'(x)=f(x)$ 。

（第二点说明连续函数总有原函数；亦说明 F(x)在 f (x)连续处可导）
（第二点反过来不一定成立：改变连续函数有限个点的值，变限积分不变，导数不再相等）
注:1：即使一个函数有原函数，也不一定是可积的!!!!!（无界情形）
注 2：$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ 。（看清楚是对谁的导数!）
注 3：$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt=f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 。（复合函数求导链式法则）
注 4：$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=\frac{d}{dx}(\int_a^{v(x)} f(t)dt-\int_a^{u(x)} f(t)dt)=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x)$ 。

换元积分法：$\int_a^b f(x)=dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ ，其中 $f(x)\in C[a,b],\varphi'(t)\in C[\alpha,\beta]$ 且 φ (α)=a, φ (β)=b。（同时**换上下限**，两个方向都可使用）

重要结论：$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$ ；分部积分法：$\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$ 。

7.5 定积分中值定理

第一中值定理：$f(x)\in C[a,b], g(x)\in R[a,b]$**且不变号**，$then\exists\xi, s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=$

$f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。（证明：连续函数介质性质；应用：进行极限估计）

带积分余项的 Taylor 公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$

$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n \underline{\underline{def}} \dfrac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$。

带 Cauchy 余项的 Taylor 公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$

$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$，其中 $\xi\in(x_0,x)$。

第二中值定理：g(x)∈R[a,b]；

(1) $\text{if } f(x)\uparrow \text{ and } f(x)\ge 0, then\exists\xi_1\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_{\xi_1}^b g(x)dx$；

(2) $\text{if } f(x)\downarrow \text{ and } f(x)\ge 0, then\exists\xi_2\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi_2} g(x)dx$；

(3) $\text{if } f(x)\uparrow \text{ or } f(x)\downarrow, then\exists\xi\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx+f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$。

Abel 变换：设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$是两组数，$B_k=\sum_{i=1}^k\beta_i$，则

$\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_n B_n$。

广义分部积分公式：$f(x),g(x)\in R[a,b], F(x)=\int_a^x f(t)dt, G(x)=\int_a^x g(t)dt, then$

$\int_a^b F(x)g(x)dx=F(x)G(x)|_a^b-\int_a^b G(x)f(x)dx$。

定积分的 Holder 不等式：$\int_a^b f(x)g(x)dx\le[\int_a^b f(x)^p dx]^{\frac{1}{p}}[\int_a^b g(x)^q dx]^{\frac{1}{q}}, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

类似不等式可得其它定积分形式。利用定积分极限定义证之即可。

7.6 定积分在几何学中的应用

Young 不等式：y=f(x)在[0,+∞)严格↑C，f(0)=0，则 ab≤$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy$。

计算面积：∫ydx；-∫y(t)dx(t)；$\int\dfrac{1}{2}r^2 d\theta$。

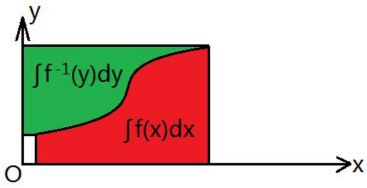
计算周长：$\int\sqrt{1+(y')^2}dx/\sqrt{1+(x')^2}dy$；$\int\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$；$\int\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

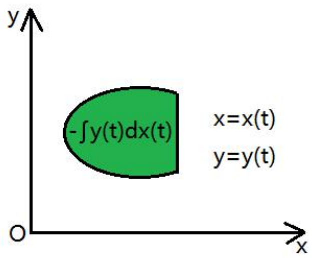
计算体积：∫S(x)dx；

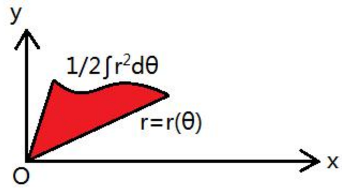
计算旋转体侧面积：$2\pi\int y\sqrt{1+(y')^2}dx / y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$（绕 x 轴旋转）

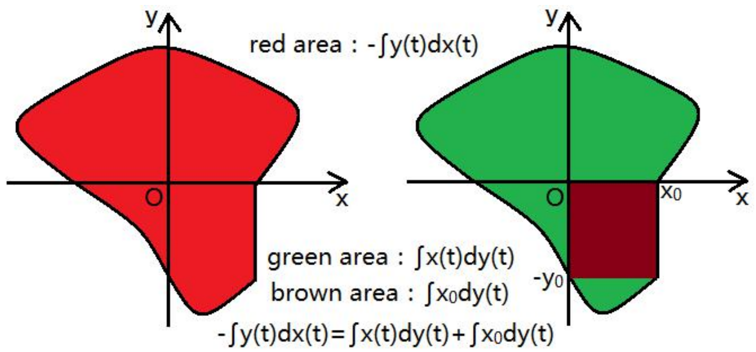
极坐标形式：$2\pi\int r(\theta)\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

tips：以参数方程形式计算时，注意前后曲线必须闭合和曲线类型(X 型 or Y 型)，选取合适的 dx 或者 dy 防止出错。对于各类方程求解体积面积类，注意其几何意义的差异，防止乱套公式的现象产生。









7.7 定积分在物理学中的应用

Guldin 第一定理：一条曲线绕 x 轴旋转一周得到旋转体的侧面积，等于曲线长度与质心绕 x 轴旋转一周的周长的乘积。

Guldin 第二定理：一个平面图形绕 x 轴旋转一周得到旋转体的体积，等于这个图形的面积与质心绕 x 轴旋转一周的周长的乘积。

tips：学会改写定积分，将 f(x)的 x 改为带参数的形式。

第八章 广义积分

8.1 无穷积分的基本概念与性质

无穷积分：无穷区间上的有界函数；瑕积分：有穷区间上的无界函数

无穷积分：f(x)在[a,+∞)上有定义，且 f(x)∈R[a,b]，∀b＞a。如果极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称其值为 f(x)在[a,+∞)上的广义积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$。

同理有 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$。

定理：设 f(x)在[a,+∞)上有定义，且 f(x)∈R[a,b]，∀b＞a。又设φ(t)在[α,β)上连续可微且严格单调上升，φ(α)=a，φ(β)=+∞，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 同敛散性，且收敛时值相等。

其余情况类似成立。

Cauchy 主值积分：$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

8.2 无穷积分敛散性的判别法

Cauchy 收敛准则：

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>a,s.t.\forall x',x''>M$都有$|\int_{x'}^{x''}f(x)dx|<\varepsilon$ 。

定义：$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛,则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛;$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛,但$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 不收敛，则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$条件收敛 。

定理：绝对收敛的无穷积分也收敛。

定理：**f(x)≥0**，x∈[a,+∞)，且 f(x)∈R[a,b]，∀b＞a。则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛$\Leftrightarrow$ $\int_a^{x}f(t)dt$ 有界。

比较判别法：设 **f(x)≥0**，x∈[a,+∞)，且 f(x)∈R[a,b]，∀b＞a。如果存在 c＞0，M＞a，使得 f(x)≤cg(x)(**暗示 g(x)≥0**)，∀**x＞M(从某位置开始)**。则：

(1)$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛$\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；(2)$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散$\Rightarrow\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散 。

极限形式的比较判别法：f(x)≤cg(x)可改写为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$：$0<l<+\infty$同敛散性；$l=0$有上上述结论；$l=+\infty$可将 f(x)和 g(x)颠倒。

Dirichlet 判别法：设 f(x),g(x)于[a,+∞)上定义，且满足：

(1)f(x)∈R[a,b]，∀b＞a，且∃M＞0，s.t.$|\int_a^{b}f(x)dx|\le M,\forall b>a$ (变上限积分有界)

(2)g(x)在[a,+∞)上单调且趋于 0 (单调趋于 0)

则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛。

Abel 判别法：设 f(x),g(x)于[a,+∞)上定义，且满足：

(1)f(x)∈R[a,b]，∀b＞a，且$\int_a^{b}f(x)dx$收敛 (变上限积分收敛/无穷积分存在)

(2)g(x)在[a,+∞)上单调有界 (单调有界)

则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛。

tips：Taylor 展开

一个可以用作定理的例题：f(x)单调，g(x)连续，不恒为 0 的周期函数。则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛$\Leftrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)|g(x)|dx$ 收敛。

8.3 瑕积分

定义：设-∞＜a＜+∞，f(x)在(a,b]上有定义，x→a+0 的过程中，f(x)无界；f(x)∈R[a+δ,b]，∀δ＞0。则称$\int_a^{b}f(x)dx$为一个瑕积分，x=a 称为 f(x)的一个瑕点。

如果 $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ 存在，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，极限值称为瑕积分的值。

以下所有公式默认 b 为瑕点。

Cauchy 准则：$\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.0<\delta_1<\delta_2<\delta,$都有$|\int_{b-\delta_2}^{b-\delta_1} f(x)dx|<\varepsilon$ 。

比较判别法：f(x),g(x)非负，且∃c＞0，δ_0＞0，使得 f(x)≤cg(x)，∀x∈(b-δ_0,b)。

则：1° $\int_a^b f(x)dx$ 发散必有 $\int_a^b g(x)dx$ 发散；2° $\int_a^b g(x)dx$ 收敛必有 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

极限形式：改成 $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$ 。1° $l\neq0$：同敛散性；2° $l=0$：$\int_a^b f(x)dx$ 发散必有 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，$\int_a^b g(x)dx$ 收敛必有 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

Dirichlet 判别法：（1）f(x)变上限积分有界；(2)g(x)单调趋于 0；

Abel 判别法：（1）f(x)变上限积分收敛；(2)g(x)单调有界。

tips：裂开函数；sinx 化 cosx 观察对称性

Beta 函数：$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 在 $p>0,q>0$ 时收敛。

余元公式：$B(p,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ 。

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx\ \underline{\underline{t=\frac{1}{1+x^\beta}}}\ \frac{1}{\beta}\int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}(1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}dt=\frac{1}{\beta}B(1-\frac{\alpha+1}{\beta},\frac{\alpha+1}{\beta})=\frac{1}{\beta}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{\beta}\pi}$$

第九章 数项级数

9.1 数项级数的基本概念

定义：设{a_n}为一个序列，称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为一个(数项)级数。其中 a_n 称为级数的通项，称 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的(前 N 项)部分和，称{S_N}为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的部分和序列。

如果 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ 存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，并定义此极限值为级数的值。如果 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ 不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散。

性质：1. 改变数项级数有限项之后得到的新级数与原来级数的敛散性相同；

2. 级数与非零倍数级数敛散性相同；　　3. 收敛级数的和具有线性性；

4. 级数收敛，则通项必趋于 0；

5. Cauchy 准则：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, s.t. n > m > N$ 时 $|\sum_{k=m+1}^{m} a_k| < \varepsilon$；

6. 收敛级数顺向可括：设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，其和为 S，$\{n_k\}$是自然数的一个子列，

令 $a_{n_0} = 0, A_k = \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k - 1} a_i$，则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ 收敛，其和也为 S。(收敛列的任一子列收敛到同一极限；而子列收敛不一定导致原数列收敛)

9.2 正 ding 项 hao 级数

定义：若在级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 中，有 $a_n \geqslant 0$ 恒成立，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一个正项级数。

定理：正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_N\}$有界；如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散，则一定发散到+∞。

比较判别法：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为两个正项级数，若 $\exists c > 0, N \in \mathbf{N},$ 使得 $a_n \leq cb_n, n > N$：

1° $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散；2° $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

极限形式的比较判别法：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为两个正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l$。则：

1° 0＜l＜+∞时，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 同敛散；

2° l=0，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛；2° $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

定理：$\{a_n\}$是单调递减数列，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} na_n = 0$。

D'Alembert 判别法：设 a_n＞0，且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$，则：$l < 1$收敛$, l > 1$发散$, l = 1$待定。

或者：$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$收敛；$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$发散。

Cauchy 判别法：设 a_n＞0，且 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = r$，则：$r < 1$收敛$, r > 1$发散$, r = 1$待定。

推广形式的比较判别法：设 $a_n,b_n>0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$，则：

1° $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散；2° $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

Raabe 判别法：$a_n>0$，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>1$ 收敛；$\overline{\lim}_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r<1$ 发散。

可代替条件：$\exists N\in\mathbf{N}, while\ \ n>N, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 1, then\ \sum_{i=1}^{+\infty}a_n$ 发散。

积分判别法：设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调，$a_n=f(n)$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散。

du Bois Reymond 定理：对于收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，一定存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$，使得 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$。（导出余项）

Abel 定理：对于发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，一定存在一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$，使得 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$。（导出部分和）

9.3 任意项级数

绝对收敛：若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 绝对收敛；

条件收敛：若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 不收敛，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛。

交错级数：设 $a_n\geqslant 0$，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 为交错级数。

Leibniz 判别法：设 $a_n\geqslant 0$ 单调下降趋于 0，则交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛。

Dirichlet 判别法：设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的部分和有界，数列 $\{b_n\}$ 单调趋于 0，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛。

Abel 判别法：设级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$的部分和收敛，数列{b_n}单调有界，则级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$收敛。

9.4 数项级数的性质

定理：设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$满足条件：1° $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；2° $\exists N \in \mathbf{N}$,使得$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$中顺项加长度不超过 N 的括号时，所得到的新级数收敛。则级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛。

定义：自然数 N 的一个重排是指定义在 N 上的一个一一对应（可逆满射）f(n):N→N。如果 f(n)是 N 的一个重排，则称级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$为级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$的一个重排。如果∃M＞0 使得|f(n)-n|≤M，∀n∈N，则称{f(n)}为 N 的一个有界重排。

定理：设{f(n)}为 N 的一个有界重排，则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$收敛，且收敛时值相等。

定理：收敛正项级数的任意重排仍收敛到相同的值。

定理：设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$绝对收敛，则它的任意一个重排$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$也绝对收敛，且$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$=$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$。

总结：条件收敛可以有界重排，绝对收敛可以任意重排。

Riemann 定理：设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$条件收敛，则$\forall -\infty \le S \le +\infty$，∃重排 f(n)使得$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$=S。

Cauchy 乘积：$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$，则$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$称为$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$的 Cauchy 乘积。

正方形乘积：$d_n = \sum_{j=1}^{n} a_n b_j + \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_n$，则$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$称为$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$的正方形乘积。

容易看出$S_n^d = S_n^a S_n^b$。

定理：当$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛时，正方形乘积$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$收敛，并且$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$=$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$。

定理：当$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$都绝对收敛时，乘积矩阵中元素按任何顺序构成的级数都

绝对收敛，并且和为$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$。

Mertens 定理：当$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛，且其中至少一个级数绝对收敛时，它们的Cauchy 乘积收敛，且$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n \sum_{n=1}^{+\infty}b_n$

9.5 无穷乘积

定义：设$\{a_n\}$为一个序列，称$\{a_n\}$的所有项的乘积$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$为此序列的无穷乘积，称$T_n=\prod_{k=1}^{n}a_k$为$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$的前 n 项部分积，$\{T_n\}$为$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$的部分积序列。

定义：如果$\lim_{n\to\infty}T_n=a\neq 0$，则称无穷乘积$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，并记 a=$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$，称 a 为$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$的值，否则称$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$发散。

定理：$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=1$。

所以以后将讨论的无穷乘积写成$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$的形式，且要求$|a_n|<1$。

定理：$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$收敛。

推论：如果 $a_n>0$，则$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛。

第十章 函数序列与函数项级数

10.1 函数序列与函数项级数的基本问题

定义：设函数序列$\{f_n(x)\}$中所有函数 $f_n(x)$都在某集合 I_0 上有定义，则对$\forall x_0\in I_0$，$\{f_n(x_0)\}$是一个数列。若此数列收敛，则称函数列$\{f_n(x)\}$在 $x=x_0$ 点收敛，$x=x_0$ 点称为函数列$\{f_n(x)\}$的一个收敛点。函数列$\{f_n(x)\}$的所有收敛点的集合称为它的收敛域。若$\{f_n(x)\}$的收敛域 $I\neq 0$，则函数列$\{f_n(x)\}$在 I 上的每一个点 x 有一个收敛值。从而这些极限值定义了 I 上的一个函数 f(x)，称为$\{f_n(x)\}$在 I 上的极限函数。

定义：设函数序列$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$中所有函数 $u_n(x)$都在某集合 I_0 上有定义，则对$\forall x_0 \in I_0$，$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$是一个级数。若此级数收敛，则称函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在 x_0 点收敛，x_0 点称为函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$的一个收敛点。函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$的所有收敛点的集合称为它的收敛域。若$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$的收敛域 $I \neq 0$，则$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在 I 上的每一个点 x 都有一个收敛值，从而这些极限值定义了 I 上的一个函数 u(x)，称为函数项级数的和函数。对于函数项级数，也可以用部分和序列 $S_n(x)$的极限来定义和函数，即$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$。

10.2 一致收敛的概念

定义：$f(x), f_n(x), n \in N$ 为定义在 I 上的函数，若对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$ s.t. $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$，$\forall x \in I$，则称$\{f_n(x)\}$在 I 上一致收敛于 f(x)，记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，$x \in I$。

类似定义函数项级数的一致收敛。

定理：设 $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), x \in I$。若存在满足条件 $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ 的数列 a_n 使得 $|f_n(x)-f(x)| \leqslant a_n$，$\forall x \in I, \forall n \in \mathbf{N}$，则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$。

定理：设$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), x \in I$。若$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_n \in I, \forall n \in \mathbf{N}$, s.t. $| f_n(x_n) - f(x_n) | \geq \varepsilon_0$，则 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$。

类似定义函数项级数的不一致收敛。

命题：一致收敛的函数在任何子区间上一致收敛。

命题：$f_n(x) \rightrightarrows f(x), g_n(x) \rightrightarrows g(x), x \in I \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x)$。

注：两个一致收敛的函数列的乘积不一定一致收敛。

定义：设$\{f_n(x)\}$为定义在 I 上的函数列，若$\exists M > 0$ 使得$|f_n(x)| \leqslant M$，$\forall x \in I$，$\forall n \in N$，则称$\{f_n(x)\}$在 I 上一致有界。

命题：$f_n(x) \rightrightarrows f(x), g_n(x) \rightrightarrows g(x), x \in I \; with \; \{f_n(x)\} \{g_n(x)\}$一致有界，则 $f_n(x)g_n(x)$在 I 上一致收敛于 f(x)g(x)。

10.3 函数序列与函数项级数一致收敛的判别法

一致 Cauchy 准则：设$\{f_n(x)\}$是定义在 I 上的函数列，则$\{f_n(x)\}$在 I 上一致收敛的充分必要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. | f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon, \forall n, m > N, x \in I$。

定理：设$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$是定义在 I 上的函数项级数，则$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在 I 上一致收敛的充分

必要条件是：$\forall \varepsilon>0,\exists N, s.t. |\sum_{k=m+1}^{n}u_k(x)|<\varepsilon,\forall n>m>N,x\in I$ 。

推论：设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 是定义在 I 上的函数项级数，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛，则 $u_n(x)\rightrightarrows 0,x\in I$ 。

最值判别法：设{$f_n(x)$}在 I 上有定义，则 $f_n(x)\rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup\{f_n(x)-f(x)\}=0$ 。

定义：设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 是定义在 I 上的函数项级数，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ 在 I 上一致收敛，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛。

M-判别法：设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上有定义，若存在正数列{M_n}使得 $|u_n(x)|\le M_n$，并且 $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛。

Dirichlet 判别法：设函数序列 $u_n(x),v_n(x)$在 I 上有定义，并且满足以下条件：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的部分和序列在 I 上一致有界；

（2）对每个 x∈I，{$v_n(x)$}关于 n 单调一致收敛于 0；

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

Abel 判别法：设函数序列 $u_n(x),v_n(x)$在 I 上有定义，并且满足以下条件：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛；

（2）对每个 x∈I，{$v_n(x)$}关于 n 单调一致有界；

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

注：不可以使用类似方法，通过 Dirichlet 证明 Abel，这是因为{$v_n(x)$}关于 n 单调一致有界导致的收敛不一定是一致收敛。

10.4 一致收敛的函数序列和函数项级数

定理：设 $f_n(x)\in C[a,b]$，且 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ ，x∈[a,b]，则 f(x)∈C[a,b]。

定理：设 $u_n(x)\in C[a,b]$，且 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在[a,b]一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \in C[a,b]$。

定义：设函数列 $f_n(x)$,n=1,2,3,⋯定义在 I 上，若 $\forall x_0\in I$，$\exists\delta>0$ s.t.$f_n(x)$在 $V(x_0,\delta)\cap I$ 上一致收敛，则称 $f_n(x)$于 I 上局部一致收敛。

定义：设$\{f_n(x)\}$在区间 I 上有定义，若$\forall [a,b]\subset I$(a,b 不为区间 I 的端点)，$\{f_n(x)\}$在[a,b]一致收敛，则称 $f_n(x)$在 I 内闭一致连续。

注：对开区间 I 来说，内闭一致收敛等价于局部一致收敛。

推论：设 $f_n(x)\in C(a,b)$,n=1,2,3,⋯且$\{f_n(x)\}$在(a,b)内闭一致收敛于 f(x)，则 $f(x)\in C(a,b)$。

命题：闭区间上一致收敛的连续函数序列一致有界。

Dini 定理：设 $f_n(x)\in C[a,b]$,$n\in N$；$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$,$\forall x\in[a,b]$；$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$，则 $f(x)\in C[a,b] \Leftrightarrow f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$。

定义：设$\{f_n(x)\}$是定义在区间 I 上的函数列，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$ $\forall n\in N,\forall x',x''\in I\ with\ |x'-x''|<\delta$，则称函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 上等度连续。

定理：设$\{f_n(x)\}$在[a,b]上一致收敛，若 $f_n(x)\in C[a,b]$,n=1,2,3,⋯，则$\{f_n(x)\}$在[a,b]等度连续。

定理：设$\{f_n(x)\}$在[a,b]等度连续，且 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$。

定理：设 $f_n(x)\in R[a,b]$,n=1,2,3,⋯，且 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$，则 $f(x)\in R[a,b]$，且 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$。

定理：设 $f_n(x)\in D[a,b]$，且 $\exists x_0\in[a,b]\ s.t.\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\exists$，$f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$，则：

1°存在[a,b]上的函数 f(x) s.t. $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$；

2°$f(x)\in D[a,b]$且 $f'(x)=g(x)$，即 $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=(\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$。

第十一章 幂级数

11.1 幂级数的收敛半径与收敛域

定义：形如 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为幂级数。下面针对 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 讨论。

定理：设幂级数$\Sigma a_n x^n$在 $x_0\neq 0$ 点收敛，则它在$(-|x_0|,|x_0|)$内闭绝对一致收敛。

定义 $R=\sup\{|x|\,|\,\Sigma a_n x^n$ 收敛$\}$，则$\Sigma a_n x^n$在(-R,R)上收敛，且在 **R**\[-R,R]上发散，并且$\Sigma a_n x^n$于(-R,R)内闭绝对一致收敛。称 R 为幂级数$\Sigma a_n x^n$的收敛半径。

定理：对幂级数$\Sigma a_n x^n$，记 $p=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$，则$\Sigma a_n x^n$的收敛半径 $R=1/p\in[0,+\infty]$。

定理：设 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=p$，则$\Sigma a_nx^n$的收敛半径 R=1/p∈[0,+∞]。

11.2 幂级数的性质

定理：设幂级数Σa_nx^n的收敛半径为 R＞0，则Σa_nx^n在收敛域 I 的任何闭子区间上一致收敛。

推论：设幂级数Σa_nx^n的收敛半径为 R＞0，则

1° Σa_nR^n收敛时，则 $\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$；

2° $\Sigma a_n(-R)^n$收敛时，则 $\lim_{x\to -R+0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$。

推论：幂级数Σa_nx^n在收敛域内连续。

定理：设Σa_nx^n的收敛半径为 R＞0，收敛域为 I，则

$\forall t_1,t_2\in I,\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{t_1}^{t_2}x^ndx$。（一致收敛函数性质）

定理：设幂级数 $f(x)=\Sigma a_nx^n$的收敛半径为 R＞0，则∀x∈(-R,R)，f(x)在 x 处具有任意阶导数，且 $f^{(k)}(x)$＝逐项求导之和。

11.3 初等函数的幂级数展开

定义：设函数 f(x)在 x=0 处具有任意阶导数，则称幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$为 f(x)对应的 Taylor 级数，记为 $f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$。如果$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$的收敛半径 R＞0 且在收敛区域内，$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，则称 f(x)在 x=0 可展开为幂级数（Taylor 展开，实解析）。如果在收敛域内$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\neq f(x)$，则称 f(x)不能在 x=0 处 Taylor 展开。

本节主要讨论对余项$\lim_{n\to\infty}[f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(0)}{k!}x^k]=0$的估计。

积分余项：$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^ndt$

广义二项式公式：$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\begin{cases}x\in(-1,1),\alpha\le -1\\ x\in(-1,1],-1<\alpha<0\\ x\in[-1,1],\alpha>0\end{cases}$。

11.4 连续函数的多项式逼近

定义：设函数在区间 I 上有定义，如果$\forall\varepsilon>0,\exists$多项式$P_\varepsilon(x),s.t.|f(x)-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon$，

$\forall x \in I$，则称 f(x)在 I 上可被多项式逼近。$P_n(x) \rightrightarrows f(x)$，从而 f(x)必连续。

命题：设 f(x)在(a,b)为有限区间，如果 f(x)在(a,b)可被多项式逼近，则 f(x)可以连续延拓到[a,b]。

定义：设 f(x)在[0,1]上有定义，称多项式 B_n(f,x)=$\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ 为 f(x)的 n 阶 Bernstein 多项式。

Weierstrauss 定理：如果 f(x)∈C[a,b]，则 f(x)于[a,b]可被多项式逼近。

第十二章 傅里叶级数

12.1 函数的傅里叶级数

定义：形如 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的函数项级数称为三角级数。

设三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在[-π,π]上一致收敛，记其和函数为 f(x)，则 f(x)=$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，x∈[-π,π]，则 f(x)∈C[-π,π]。事实上，由周期性，f(x)∈C(R)，且 f(x)=f(x+2π)。

Euler-Fourier 公式：$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$。

定义：设 f(x)为 2π为周期且 f(x)∈R[-π,π]，则按照 Euler-Fourier 公式可得一列数{a_0,a_n,b_n}，称为 f(x)所对应的 Fourier 系数，由此而得的三角级数称为 f(x)所对应的 Fourier 级数，记为 f(x)～$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$。

定理：设 f(x)∈C(**R**)**(定义域已给定)**，**f(x)=f(x+2π)(注意：周期已给定)**，f(x)的 Fourier 系数全为 0，则 f(x)=0，x∈R。

如果函数是 2T 周期的，即 f(x)=f(x+2T)，则

$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}xdx$，$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}xdx$。

事实上，$\{1,\cos\frac{n\pi}{T}x,\sin\frac{n\pi}{T}x\}$ 是 2T 周期函数的正交三角函数系。

定义：对定义于[0,T]上的函数 f(x)，作 $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi}{T}xdx$，所得的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{T}x$ 称为 f(x)对应的正弦级数。

定义：对定义于[0,T]上的函数 f(x)，作 $a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi}{T}xdx$，所得的级数

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{T}x$ 称为 f(x)对应的余弦级数。

12.2 傅里叶级数的敛散性

若 f(x)为 2π周期函数且 f(x)∈R[-π,π]，则 f(x)的 Fourier 级数的部分和为

$S_n(x)=\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}dt$ 。称 $D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$ 为 Dirichlet 核，

其满足 $\int_0^{\pi} D_n dt=\frac{1}{2},\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt=1$ 。

对任意确定的 x_0∈[-π,π]， $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)=\eta_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\eta_0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)dt-\eta_0\to 0\ \ (n\to+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}\{[f(x_0+t)+f(x_0-t)]-2\eta_0\}D_n(t)dt\to 0\ \ (n\to+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2\eta_0}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt\to 0\ \ (n\to+\infty)$$

定义：设 f(x)∈R[a,b]或者 f(x)在[a,b]具有有限个瑕点，在不含瑕点的任何闭区间上 Riemann 可积，并且|f(x)|在[a,b]在[a,b]作为瑕积分是收敛的，此时称 f(x)在[a,b]至多有有限个瑕点且绝对可积。

Riemann-Lebesgue 引理：设 f(x)在[a,b]至多有有限个瑕点且绝对可积，则

$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda xdx=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda xdx=0$ 。

引理：设 f(x)在[0,t]上至多有有限个瑕点且绝对可积，则 $\int_0^t\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}f(t)dt$ 与

$\int_0^t\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}f(t)dt$ 在 n→+∞时同敛散，且收敛时极限相等。

Riemann 局部化定理：设 2π周期函数 f(x)在[-π,π]至多有有限个瑕点且绝对可积，则 f(x)对应的 Fourier 级数在 x_0∈[-π,π]的收敛性只与 f(x)在(x_0-δ,x_0+δ)的值有关，其中δ＞0 是任意确定的正数。

Dini 定理：设 f(x)是 2π周期函数，在[-π,π]上至多有有限个瑕点且绝对可积，对任意确定的 x∈[-π,π]，若存在δ＞0，η_0∈R，使得 $\int_0^{\delta}|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2\eta_0}{t}|dt<+\infty$

(Dini 条件)，则 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\eta_0$ 。

定义：设 f(x)在[a,b]有定义，若存在[a,b]的分化Δ:a=x_0＜x_1＜⋯＜x_n=b 使得 f(x)仅

以 x_i 为第一类间断点，且在 x_i 处存在广义单侧导数，即 $\lim\limits_{h\to 0+0}\frac{f(x_i+h)-f(x_i+0)}{h}\underline{\underline{def}}f_+'(x_i)$， $\lim\limits_{h\to 0+0}\frac{f(x_i-h)-f(x_i-0)}{h}\underline{\underline{def}}f_-'(x_i)$ 存在，而当 $x\in(x_{i-1},x_i)$时 f'(x)存在，则称 f(x)于[a,b]分段可微。

定理：设 f(x)是 2π周期函数，在[-π,π]上分段可微，则 f(x)的 Fourier 级数处处收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。即 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，任意 $x\in[-\pi,\pi]$。

Lipschitz 定理：设 f(x)是 2π周期函数，在[-π,π]上至多有有限个瑕点且绝对可积，若 f(x)在 x_0 点局部满足α阶 Holder 连续性，即 $\exists L>0,\delta>0,\alpha>0$，s.t.$|f(x_0+t)-f(x_0)|\leqslant L|t|^\alpha$，则 f(x)的 Fourier 级数在 x_0 点收敛到 $f(x_0)$。

Dirichlet 定理：设 f(x)是 2π周期函数，在[-π,π]上至多有有限个瑕点且绝对可积，对任一确定的点 $x_0\in[-\pi,\pi]$，若存在δ＞0 使得 f(x)在$(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0+x_0+\delta)$分别单调，则 f(x)的 Fourier 级数在 x_0 点收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。

总结：对于 2π周期函数 f(x)，在[-π,π]上至多有有限个瑕点且绝对可积的条件下。如果 1° f(x)在[-π,,π]上分段单调；或 2° f(x)在[-π,,π]上分段可微；或 3° f(x)在[-π,,π]上正数阶 Holder 连续，则在 f(x+0),f(x-0)都存在的点 x，有 f(x)的 Fourier 级数收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。

注意：只有函数的连续或可积的条件不足以保证其对应的 Fourier 级数的收敛性。

12.3 傅里叶级数的其他收敛性

定义：形如 $\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\sin^k x+b_k\cos^k x)$ 的函数称为 n 阶(2π周期的)三角多项式。

Weierstrass 第二逼近定理：设 2π周期函数 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，则存在三角函数列 $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$ 满足 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,s.t.|T_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\forall n>N$。

设 f(x)～ $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$， $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$。

记 $\overline{S}_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}S_k(x)$， $\Phi_n(t)=\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$ 为 Fejér 核， $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1$，

则 $\overline{S}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)dt$，且 $\overline{S}_n(x)\rightrightarrows f(x)$。

定义：设 f(x)在[a,b]内至多有有限个瑕点，f(x)在任何不包含瑕点的子区间上 Riemann 可积，并且 $f^2(x)$在[a,b]上的瑕积分是收敛的，则称 f(x)在[a,b]上平方可积。

定义：设 f(x),f_n(x),n=1,2,3…在[a,b]平方可积，并且满足 $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx = 0$，则称{$f_n$(x)}在[a,b]上均方收敛于 f(x)。

Fourier 最佳逼近定理：设 f(x)在[-π,,π]上平方可积，S_n(x)表示其 Fourier 级数的部分和序列，则对任意 n 阶三角多项式 T_n(x)，成立 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2 dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2 dx$，当且仅当 $S_n(x)=T_n(x)$ 取等号。

Bessel 不等式：若 f(x)平方可积，则 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$。

推论：若 f(x)平方可积，则 m＞n$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2 dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2 dx$。

定理：设函数 f(x)在[-π,,π]上平方可积，则对 f(x)的 Fourier 级数部分和序列{S_n(x)}，有 $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2 dx = 0$。

Parseval 等式：设函数 f(x)在[-π,,π]上平方可积，则 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$，

其中 f(x) ~ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$。

广义 Parseval 等式：设函数 f(x),g(x)在[-π,,π]上平方可积，

f(x) ~ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，g(x) ~ $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$，

则 $\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$。

定理：设 2π周期函数 f(x)∈D[-π,π]，f'(x)∈R[-π,π]，则 f(x)的 Fourier 级数在 R 上一致收敛到 f(x)。

定理：设 2π周期函数 f(x),f'(x)∈D[-π,π]，f''(x)∈R[-π,π]，

f(x)=$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 f'(x)=$\sum_{n=1}^{+\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$。

定理：设 2π周期函数 f(x)∈R[-π,π]，f(x) ~ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则

$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n(1-\cos nx)}{n}]$。