第十三章 多元函数的极限和连续

13.1 欧式空间 R^n

定义：对某一非空集合 E，如果存在一个 E×E 到 R 上的二元关系 d，d：E×E→R，(x,y)→d(x,y)满足下述三个性质：1° 正定性，$d(x,y)\geqslant 0$，$\forall x,y\in E$ 并且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；2° 对称性，d(x,y)=d(y,x)；3° 三角不等式，$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$。则称二元关系 d 为 E 上的一个距离。此时 E 和 d 作为一个整体称为距离/度量空间，记作(E,d)。

定义：对某一线性空间 E(这里默认数域为 R)，如果存在一个 E 到 R 上的一元关系$||\cdot||$，$||\cdot||$：E→R，x→||x||满足下述三个性质：1° 正定性，$||x||\geqslant 0$，$\forall x\in E$ 并且$||x||=0\Leftrightarrow x=0$；2° 正齐次性，$||cx||=|c|\ ||x||$，$\forall x\in E$，$\forall c\in R$；3° 次可加性，$||x+y||\leqslant||x||+||y||$。则称一元关系$||\cdot||$为 E 上的一个范数，此时 E 和$||\cdot||$作为一个整体称为赋范线性空间，记作$(E,||\cdot||)$。

注意：一个线性空间上，可以定义多种范数。

性质：若在$(E,||\cdot||)$上定义 $d(x,y)=||x-y||$，$\forall x,y\in E$，则容易验证 d 是距离。所以，赋范线性空间一定是距离空间，即范数诱导出距离。

定义：如果存在 E×E 到 R 上的二元关系(,)，(,)：E×E→R，(x,y)→(x,y)，满足下面四条性质：1° 正定性，$(x,x)\geqslant 0$，$\forall x\in E$ 并且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$；2° 对称性，(x,y)=(y,x)，$\forall x,y\in E$；3° 关于数的线性性，(cx,y)=c(x,y)，$\forall x,y\in E$，$c\in R$；4° 关于元素的线性性，(x,y+z)=(x,y)+(x,z)，$\forall x,y,z\in E$，则称二元关系(,)为 E 上的一个内积，即内积是一个正定双线性关系，此时 E 和(,)作为一个整体称为内积空间，记作(E,(,))。

性质：容易看出，E 上的内积诱导出一个范数，$||x||=(x,x)^{1/2}$。

定义：带有内积(范数、距离)的 R^n 称为 n 维欧几里得空间。

定义：设 $x_0\in R^n$，$\delta>0$，称集合 $U(x_0,\delta)=\{x\in R^n\,|\,|x-x_0|<\delta\}$为以 x_0 为心的δ邻域。称 $U_0(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}$为 x_0 的空心δ邻域。

定义：$N(x_0,\delta)=\{x\in R^n\,|\,|x_j-x^0_j|<\delta\}$为方形邻域，显然 $U(x_0,\delta)\subset N(x_0,\delta)\subset U(x_0,\sqrt{n}\,\delta)$。所以，一般的结论在使用二者中的任何一个进行讨论都是等价的。

定义：设点列$\{x_k\}\subset R^n$，若存在 $x_0\in R^n$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}|x_k-x_0|=0$，则称点列$\{x_k\}$收敛于点 x_0，也称 x_0 为点列$\{x_k\}$的极限点。存在极限的点列称为收敛点列，不存在极限的点列称为发散点列。

定理：设$\{x_k\}$是 R^n 中的点列，$x_0=\{x_1^0,\cdots,x_n^0\}\in R^n$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x_0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}x_j^k=x_j^0,\forall j$。

定义：称集合 $E\subset R^n$ 有界，如果$\exists M>0$，s.t. $|x|\leqslant M$，$\forall x\in E$。

高维空间中的点列极限的性质：1° 极限唯一；2° 收敛有界；3° 线性性。

定义：对 R^n 的非空集合 E，如果 $U_0(x,\delta)\cap E\neq 0$，$\forall\delta>0$，则称 x 为 E 的一个聚点。

定理：点 P_0 是 E 的聚点的充要条件是存在点列$\{P_n\}\subset E$，$P_n\neq P_0$，$\forall n\in N$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$。

定义：若 $x\in E$ 而不是 E 的聚点，则$\exists\delta>0$ 使得 $U_0(x,\delta)\cap E=0$，此时称 x 为 E 的孤立点。

性质：所以，一个集合中的点，要么是聚点，要么是孤立点。

定义：对于两个无限集 A,B 来说，若 $B\subset A$ 且 A 中的任何点的任何邻域都有 B 的点，则称 B 在 A 中稠密。

定义：设集合 $E\subset R^n$，点 P 称为 E 的内点，如果$\exists\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)\subset E$。

定义：显然，E 的内点一定是聚点。所有内点的集合称为 E 的内部，记为 E° 。

定义：点 P 称为 E 的外点，如果$\exists\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)\cap E=0$。

定义：$R^n\setminus E$ 称为 E 的余集，记作 E^c。

定义：点 P 称为 E 的边界点，如果$\forall\varepsilon>0$，$U(P,\varepsilon)\cap E\neq 0$，$U(P,\varepsilon)\cap Ec\neq 0$。E 的所有边界点的集合称为 E 的边界，记作$\partial E$。

定义：如果 $E^\circ=E$，则称 E 为开集。开集所有点都是内点。集合 E 的所有聚点构成的集合称为 E 的导集，记作 E'。集合 E 和它的所有聚点构成的集合称为 E 的闭包，记作 $\overline{E}$，即 $\overline{E}=E\cup E'$。集合 E 称作闭集，如果 $E=\overline{E}$。规定空集 0 和 R^n 既开又闭。

定理：有限个开集的交集是开集，任意多个开集的并集是开集。有限个闭集的并是闭集，任意多个闭集的交集是闭集。$E\subset R^n$ 开$\Leftrightarrow E^c$ 闭。

定义：如果集合 E 中任意两点都能用属于 E 的连续曲线连接，则称 E 是道路连通集。道路连通的开集称为区域。若 D 是区域，则称 $\overline{D}$ 是闭区域。

定义：如果 E 内任意两点间的直线也属于 E，则称 E 为凸集。凸的区域称为凸域。

定理：设Λ为一指标集，$E_\lambda\subset R^n$，$\forall\lambda\in\Lambda$，则 $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda^c$，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda^c$。

定义：设点列$\{P_n\}\subset R^n$，若$\forall\varepsilon>0$，存在 $K\in N$ 使得 $d(P_k,P_m)<\varepsilon$，$\forall k,m>K$，则称$\{P_k\}$为 Cauchy 列。

定理：Cauchy 列$\Leftrightarrow$收敛。

定义：集合 E 的直径定义为 $diam(E)=\sup d(P_1,P_2)$，$P_1,P_2\in E$。

定理：设$\{F_k\}$是非空闭集列，满足 1° $F_1\supset F_2\supset\cdots\cdots\supset F_k\supset\cdots\cdots$；2° $diam(F_k)\to 0$ $(k\to\infty)$，则存在唯一一点 $P_0\subset F_k$，$\forall k$，即$\{P_0\}=\bigcap_{k=1}^{+\infty}F_k$。

定义：就一个有距离的空间 X 来说，如果其任一 Cauchy 列都有极限点，则称 X 是完备的。

定理：有界点列必有收敛子列，R^n 中任何有界无穷集必有聚点。

定义：开集族$\Theta=\{G_\alpha\}$称为 E 的一个开覆盖，如果 E 中的每一个点至少属于Θ中的某一个开集，即 $E=\bigcup_\alpha G_\alpha$，其中$\alpha$为指标，它属于某个指标集。

定理：设 $E\subset R^n$ 是非空有界闭集，$\Theta=\{G_\alpha\}$是 E 的一个开覆盖，则从Θ中必能选出有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$ 使得 $E=\bigcup_{j=1}^{n}G_j$。

定义：如果集合 K 的每一个开覆盖都含有一个有限子覆盖，则称 K 为紧集。

定理：$E\subset R^n$ 是紧集的充要条件是 E 是有界闭集。

13.2 多元函数与向量函数的极限

定义：如果 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射。如果 f(X)=Y，则称 f 是满射。既单又满的映射称为双射。如果 $x\subset R^n$，$Y\subset R$，则称映射 f 为 n 元函数。

性质：设 f: X→Y 为映射，$A_\alpha\subset X$，$B_\alpha\subset Y$，α为属于某指标集的指标。则 $f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha)$。

定义：设 f(P)定义于集合 $E\subset R^n$ 上，P_0 是 E 的一个聚点。若有常数 A 满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $|f(P)-A|<\varepsilon$，$\forall P\in U_0(P_0,\delta)\cap E$，则称 P 趋于 P_0 时，函数 f(P)以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{P\in E\to P_0}f(P)=A$。

定义：设 f(x,y)在$\{(x,y)|0<|x-x_0|<a,0<|y-y_0|<a\}$上有定义，若对任意固定的 y $\in(y_0-a,y_0+a)\backslash\{y_0\}$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在，且 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$ 存在，则称 A 是函数 f(x,y)的一个累次极限，记作 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$。

定理：设 f(x,y)在$\{(x,y)|0<|x-x_0|<a,0<|y-y_0|<a\}$上有定义，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=$ A，则：

1° $\forall$ fixed $y\in(y_0-a,y_0+a)\backslash\{y_0\}$均有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 时，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$=A；

2° $\forall$ fixed $x\in(x_0-a,x_0+a)\backslash\{x_0\}$均有 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\phi(x)$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$=A。

定义：映射 $\vec{f}:R^n\to R^m$ 称为一个 n 元 m 维向量函数，简称向量函数，记作 $u=\vec{f}(x)$。若 $\vec{f}$(E)是 R^m 中的有界集，则称 $\vec{f}$(E)是 E 上的有界向量函数。

定义：$\lim\limits_{x\to x_0}\vec{f}(x)=(A_1,\cdots,A_m)$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0}f_j(x)=A_j,\forall j$。

13.3 多元连续函数

定义：设 x_0 是 n 元函数 y=f(x)的定义域 E 中的一个点，如果 $\lim\limits_{x\in E\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 y=f(x)在 x_0 点连续。如果 f(x)在 E 的每一点都连续，则称 f(x)在 E 上连续，记作 $f(x)\in C(E)$。

性质：所有初等函数表示的多元函数在其定义域上是连续的。

定义：对于向量函数 $\vec{f}(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))$，我们称其在 x_0 点上连续当且仅当 $f_j(x)$，j=1,2,⋯,m 都在 x_0 点连续。

定义：设 $f(x)\in C(E)$，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，$\forall x_1,x_2\in E$ with $|x_1-x_2|<\delta$，则称 f(x)在 E 上一致连续。

定义：对于向量函数 $\vec{f}(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))$，我们称其一致连续当且仅当 $f_j(x)$，j=1,2,⋯,m 都一致连续。

定理：$E\subset R^n$ 是一个紧集，向量函数 $\vec{f}(x)$ 在 E 上连续，则 $\vec{f}(E)\subset R^m$ 紧。从而有

推论：1° f(x)在 E 上有界；2° f(x)在 E 上取到最大最小值；3° f(x)在 E 上一致连续。

定理：设 $E\subset R^n$ 是道路连通集，向量函数 $\vec{f}(x)$ 在 E 上连续，则 $\vec{f}(E)\subset R^m$ 连通。

定理：设 $E\subset R^n$ 是道路连通集，$f(x)\in C(E)$ 且 $\exists x_1,x_2\in E$ 使得 $f(x_1)<0$，$f(x_2)>0$，则 $\exists x_0\in E$ 使得 $f(x_0)=0$。

定义：若映射 $\vec{f}:E\subset E^n\to\vec{f}(E)\subset R^m$ 是双射，定义一个 $\vec{f}(E)\to E$ 的映射 $\vec{f}^{-1}$ 如下：

$\forall y\in\vec{f}(E)$，$\vec{f}^{-1}(y)=x$，其中 $\vec{f}(x)=y$。称 $\vec{f}^{-1}$ 为 $\vec{f}$ 的逆映射，显然 $\vec{f}^{-1}\bullet\vec{f}=id$。

定义：若 $\vec{f}:E\subset E^n\to\vec{f}(E)\subset R^n$ 是双射，且 $\vec{f}^{-1}$ 与 $\vec{f}$ 都连续，则称 $\vec{f}$ 为 E 到 $\vec{f}(E)$ 的同胚变换或同胚映射。

注意：一般来说，映射连续和双射，导不出逆映射连续。

第十四章 多元微分学

注意：在以下所有向量中，梯度▽为行向量，定义域 x、值域 f(x)为列向量。

14.1 偏导数与全微分

定义：偏导数 $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=\lim\limits_{x_i\to x_i^0}\dfrac{f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{x_i-x_i^0}$（对应坐标轴上的截线的导数）。

注意：偏导数也是 n 元函数。

注意：函数在 $x=x_0$ 处各个偏导数存在，不能保证函数在 $x=x_0$ 点连续。

定义：全增量 $\Delta x=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$，$x=x_0+\Delta x$，若存在仅依赖于 x_0 的常数 A_i 使得

$\Delta f(x_0)=\sum\limits_{i=1}^n A_i\Delta x_i+o(|\Delta x|)$，则称 f(x)在 x_0 处可微，称 $\sum\limits_{i=1}^n A_i\Delta x_i$ 为全微分。

定理：如果 n 元函数 f 可微，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 都存在，且 $df=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$。

定理：n 元函数 f 可微，则必连续。

定理：如果 n 元函数 f 的偏导数都存在且连续，则 f 可微。记作 $f(x)\in C^1(D)$，D 是函数的定义域。

定义：单位向量 $\mathbf{v}=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n)$，$\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial v}=\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$ 定义为 f(x)在点 x_0 处在方向 v 上的方向导数。

注意：方向导数所说的方向是在底（n 维）平面上的，切线是在空中的。

定理：如果 n 元函数 f 可微，则 $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial v}=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i$。

定义：grad $f(x_0)=\left(\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)$ 定义为 f(x)的梯度，也记作 ∇f，梯度方向是

函数值增加速度唯一最大的（水平）方向，最大值为梯度的模长。

注意：设函数 y=f($x_1,\cdots,x_n$)，有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=dy$，即 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n},-1\right)(dx_1,\cdots,dx_n,dy)$ =0，从而任意切向量($dx_1,\cdots,dx_n,dy$)，都有向量 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n},-1\right)\perp(dx_1,\cdots,dx_n,dy)$，从而过固定点所有方向上的切线都在同一（超）平面内。从而，函数 y=f($x_1,\cdots,x_n$) 在可微点存在切平面。

定义：称所有切线所在的平面为切平面，垂直于切平面的矢量称为法向量。

性质：设 f 和 g 是 n 元可微函数，则 1° $\nabla C=0$；2° $\nabla(af+bg)=a\nabla f+b\nabla g$；3° $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$；4° $\nabla(\frac{f}{g})=\frac{g\,\nabla f-f\,\nabla g}{g^2}$。

定理：（链式法则）设 u=f(x,y)，x=g(s,t)，y=h(s,t)构成复合函数，$\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial s},\frac{\partial y}{\partial t}$ 都存在，f(x,y)可微，则对于 u=f(g(s,t),h(s,t))两个偏导数都存在，且

1° $\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$；2° $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$。其余情况同理。

定义：向量函数 $\vec{f}(x)$ 的全微分：

$$\Delta\vec{f}(x)=\begin{pmatrix}\Delta f_1(x)\\ \Delta f_2(x)\\ \vdots\\ \Delta f_m(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\ A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1(|\Delta x|)\\ \alpha_2(|\Delta x|)\\ \vdots\\ \alpha_n(|\Delta x|)\end{pmatrix}，且 \lim_{|\Delta x|\to 0}\frac{\alpha_i(|\Delta x|)}{|\Delta x|}=0。$$

则称 $\vec{f}(x)$ 可微/导，称矩阵 A 为导数/Jacobi 矩阵，记作 $D\vec{f}(x)$ 或者 $\vec{f}'(x)$，$A\Delta x$ 称为向量函数 $\vec{f}(x)$ 的全微分，记作 $d\vec{f}(x)=\vec{f}'(x)dx$。

性质：可微的充要条件是分量函数可微，从而有 $A_{ij}=\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$。

定义：若 A 是方阵，|A|称为 Jacobi 行列式，记作 $|f'(x_0)|$ 或 $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}|_{x_0}$。

14.2 多元函数求导法

定理：导数的四则运算：1° $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$；2° $(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$；3° $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$。

（以上要求(向量)函数的定义域和值域恰好合适）

定理：$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_p)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_p)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}\frac{\partial(u_1,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$，或 $df(u(x))=f'(u(x))u'(x)dx$。从而有 $\frac{\partial f(u(x_0))}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(u_0)}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j(x_0)}{\partial x_i}$。

定义：设 $\vec{f}:D\subset R^n\to R^m$，$\vec{f}(x)\in C^1(D)$，$x_0\in D$，如果 rank($\vec{f}'(x_0)$)＜min(n,m)，则称 x_0 为 $\vec{f}(x)$ 的临界点，$y_0=\vec{f}(x_0)$ 称为向量函数的临界值。特别地，若 f 是 n 元函数，则 $x_0\in D$ 是临界点的充要条件是 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=0$，即 $\nabla f(x_0)=f'(x_0)=0$；若 f 是 n 元 n 维向量函数，则则 $x_0\in D$ 是临界点的充要条件是 $|f'(x_0)|=0$。

定义：多元函数的高阶偏导数：若 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 仍有偏导数，则将 $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_k}$ 记为 $f_{ki}''(x)$ 或 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}$。n 元函数具有 n^2 个二阶偏导。

定理：如果二阶偏导数存在且连续，那么 $f_{ki}''(x)=f_{ik}''(x)$。进一步，如果 $f_{ki}''(x)$ 或 $f_{ik}''(x)$ 在 x_0 点附近存在且**其中之一**在 x_0 点连续，那么 $f_{ki}''(x)=f_{ik}''(x)$。

定义：引入记号 $C^k(D)$为区域 D 上的具有直到 k 阶连续偏导数的函数的全体。

定义：二阶微分：$d^2 f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\partial x_i}dx_k dx_i$。

定义：记 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为△，称作 Laplace 算子。

定义：2 元函数的高阶全微分：$d^k u=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})^k u=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k u}{\partial x^i\partial y^{k-i}}dx^i dy^{k-i}$。

定义：n 元函数的高阶全微分：$d^k u=\left(\sum_{i=1}^{n}dx_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k u$。

14.3 泰勒公式

定理：设 f(**x**)在 $\mathbf{x_0}\in R^n$ 的邻域 U($\mathbf{x_0}$,δ_0)内具有 K+1 阶连续偏导数，则对于满足 $\mathbf{x_0}$+h=($x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n$)∈U($x_0,\delta_0$)，有：（0＜θ＜1）（Lagrange 余项）

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x_0)+\frac{1}{(K+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{K+1}f(x_0+\theta h)。$$

定理：设 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x_0}\in R^n$ 的邻域 $U(\mathbf{x_0},\delta_0)$ 内具有 K 阶连续偏导数，则对于满足 $\mathbf{x_0}+h=(x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)\in U(\mathbf{x_0},\delta_0)$，有：（Peano 余项）

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x_0)+o(|h|^K)with\,|h|\to 0。$$

定义：取 K=2，有 $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}h^T H_f(x_0)h+o(|h|^2)with\,|h|\to 0$。

其中 $H_f(x_0)=\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\partial x_j}\right)$（二次型）称为 Hesse 矩阵。

14.4 隐函数存在定理

定理：设二元函数 $F(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内满足以下条件：1° $F(x_0,y_0)=0$；2° $F(x,y)$ 和 $F_y'(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内连续；3° $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$。则 $\exists\,\delta_0\in(0,\delta)$，s.t.在 $U((x_0,y_0),\delta_0)$ 内存在唯一的连续函数 $y=f(x)$ 满足：1° $y_0=f(x_0)$；2° $F(x,f(x))=0$，$\forall x\in U(x_0,\delta_0)$；3° 如果 $F_x'(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内连续，则 $f(x)\in C^1$ 且 $f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}$。

定理：记 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\mathbf{x_0}=(x_{0,1},\cdots,x_{0,n})$，假设函数 $F(\mathbf{x},y)=F(x_1,\cdots,x_n,y)$ 在 $U(\mathbf{x_0},\delta)\times U(y_0,\delta)$ 内有定义，并满足：1° $F(\mathbf{x_0},y_0)=0$；2° $F(\mathbf{x},y)$ 和 $F_y'(\mathbf{x},y)$ 在 $U(\mathbf{x_0},\delta)\times U(y_0,\delta)$ 内连续；3° $F_y'(\mathbf{x_0},y_0)\neq 0$。则存在 $\delta_0>0$ 使得在 $U(\mathbf{x_0},\delta_0)$ 内存在唯一满足下列条件的连续函数 $y=f(\mathbf{x})$：1° $y_0=f(\mathbf{x_0})$；2° $F(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))=0$，$\forall\,\mathbf{x}\in U(\mathbf{x_0},\delta_0)$；3° 如果 $F(\mathbf{x},y)$ 的各个偏导数在 $U(\mathbf{x_0},\delta_0)\times U(y_0,\delta_0)$ 内连续，则 $f(x)\in C^1$ 且 $f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}$。

注意：不用死记隐函数的导数公式，只要求全微分即可。

定理：设向量函数 $F(\mathbf{x},\mathbf{u})=(F_1(\mathbf{x},\mathbf{u}),\cdots,F_m(\mathbf{x},\mathbf{u}))$ 在 $U(\mathbf{x_0},\delta)\times U(\mathbf{u_0},\delta)$ 内有定义，其中 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_m)$，并且满足：1° $F_j(x_0,u_0)=0$，$\forall j$；2° $F_j(x,u)$ 以及各个偏导数在 $U(\mathbf{x_0},\delta)\times U(\mathbf{u_0},\delta)$ 内连续；3° $\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}|_{(x_0,u_0)}\neq 0$。则存在 $\delta_0>0$ 使得在 $U(\mathbf{x_0},\delta_0)$ 内存在唯一的 m 维 n 元向量函数 $f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_m(\mathbf{x}))$：1° $\mathbf{u_0}=f(\mathbf{x_0})$；2° $F_j(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))=0$，$\forall x\in U(\mathbf{x_0},\delta_0)$；3° $f'(x)=-\frac{F_x'(x,u)}{F_u'(x,u)}$（分母表示逆）。

定理：（逆映射存在）设 $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_n(\mathbf{x}))$ 是区域 $D\subset R^n$ 到 $\Omega\subset R^n$ 一个 C^1 映射，且 $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}|_{x_0}\neq 0$，记 $\mathbf{y_0}=f(\mathbf{x_0})$，则存在 $\mathbf{x_0}$ 的邻域 $U(\mathbf{x_0},\delta)$ 使得 $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ 是 $U(\mathbf{x_0},\delta)$ 到 $f(U(\mathbf{x_0},\delta))$ 的 C^1 同胚映射，其中 $f(U(\mathbf{x_0},\delta))$ 是包含 $\mathbf{y_0}$ 的一个区域。

14.5 多元函数的极值

定义：设函数 $u=f(\mathbf{x})$ 在区域 $D\subset R^n$ 内有定义，$\mathbf{x_0}\in D$，若存在 $\mathbf{x_0}$ 的邻域 $U(\mathbf{x_0},\delta)$ 使得 $f(\mathbf{x})\leqslant f(\mathbf{x_0})$，$\forall x\in U(\mathbf{x_0},\delta)$，则称 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x_0}$ 点取得极大值，$\mathbf{x_0}$ 称为 $f(\mathbf{x})$ 的极大值点。

定理：设函数在 $u=f(\mathbf{x})$ 点 $\mathbf{x_0}$ 处取得极值，且 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x_0}$ 点各个偏导数存在，则偏导数都为 0；进一步，如果 $f(\mathbf{x})$ 在极值点 $\mathbf{x_0}$ 点可微，则 $f'(\mathbf{x})=0$。

定理：设函数 f($\mathbf{x}$)在区域 $D\subset R^n$ 内有连续二阶偏导数，且 $f'(\mathbf{x_0})=0$，$\mathbf{x_0}\in D$，且 $H_f(\mathbf{x_0})$ 满秩。则当 $H_f(\mathbf{x_0})$正定时，f($\mathbf{x_0}$)取极小值；$H_f(\mathbf{x_0})$负定时，f($\mathbf{x_0}$)取极大值；$H_f(\mathbf{x_0})$不定时，不取极值。若 $H_f(\mathbf{x_0})$不满秩，则需要使用高阶导数判定 f($\mathbf{x_0}$)是否极值。

定理：【条件极值的必要性条件】设 n 元函数 f($\mathbf{x}$)和 m(<n)维 n 元向量函数 $g(\mathbf{x})=(g_1(\mathbf{x}),g_2(\mathbf{x}),\cdots,g_m(\mathbf{x}))$在区域 $D\subset R^n(m<n)$内有各个连续偏导数，再设 $\mathbf{x_0}=(x_1,\cdots,x_n)\in D$ 为 f($\mathbf{x}$)在约束条件 g($\mathbf{x}$)=0 下的极值点，且 rank(g'(x))=m，则存在常数 $t_1,\cdots,t_m\in R$，使得：

1° $g(\mathbf{x_0})=0$；（满足约束条件）

2° $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}t_j\dfrac{\partial g_j(x_0)}{\partial x_i}=0,\forall i=1,2,\cdots,n$，即 $f'(x)+(t_1,\cdots,t_m)g'(x)=0$。

注意：若构造函数 $F(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_m)=f(\mathbf{x})+t_1g_1(\mathbf{x})+\cdots+t_mg_m(\mathbf{x})$，则求极值的必要条件为函数 F($\mathbf{x,t}$)取极值的必要条件，即：$\dfrac{\partial F(x_0)}{\partial x_i}=0,\dfrac{\partial F(x_0)}{\partial t_i}=0$。（lagrange 数乘法）

定理：【条件极值的充分性条件】设($\mathbf{x_0,t_0}$)为函数 $F(\mathbf{x,t})=f(\mathbf{x})+t_1g_1(\mathbf{x})+\cdots+t_mg_m(\mathbf{x})$的驻点，其中 $\mathbf{x_0}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\mathbf{t_0}=(t_1,\cdots,t_m)$。固定 $\mathbf{t_0}$，考虑函数 F($\mathbf{x,t_0}$)，则其 Hesse 矩阵

$H_F(\mathbf{x_0,t_0})=\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(x_0,t_0)\right)_{n\times n}$。

1° 如果 $H_F(\mathbf{x_0,t_0})$正定或负定，则 $\mathbf{x_0}$ 是 F($\mathbf{x,t_0}$)的极值点，且 $\mathbf{x_0}$ 是 f($\mathbf{x}$)的条件极值点；

2° 如果 $H_F(\mathbf{x_0,t_0})$不定，则 $\mathbf{x_0}$ 不是 F($\mathbf{x,t_0}$)的极值点，但不能说明 $\mathbf{x_0}$ 不是 f($\mathbf{x}$)的条件极值点。

14.6 多元微分学的几何应用

定义：R^n 中的一条曲线是$[\alpha,\beta]\to R^n$ 的一个连续映射 $h(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$。如果 $h(t_1)\neq h(t_2)$，$\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$，则称该曲线是简单曲线；如果 $h(t_1)\neq h(t_2)$，$\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta)$，但是 $h(\alpha)=h(\beta)$，则称该曲线是简单闭曲线，也称为 Jordan 曲线。

定理：设曲线方程为 $h=(x(t),y(t),z(t))$，其于 $t=t_0$ 点的切线方向为$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$。

定理：考虑参数式曲面 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$，$M_0=(x_0,y_0,z_0)$是曲面上一点，其于 M_0 点的法线方向为$\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$。

定理：设曲面由方程 F(x,y,z)=0 给出，$M_0=(x_0,y_0,z_0)$是曲面上一点，则 F(x,y,z)=0 作为三元函数 u=F(x,y,z)的零值等位面，其于 M_0 点的法线方向为$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$。

定理：设曲线由方程组 F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0 隐式给出，$M_0=(x_0,y_0,z_0)$是曲面上一点，其于 M_0 点的切线方向为$\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$。

定义：设 $D\subset R^n$ 是凸区域，f($\mathbf{x}$)在 D 上定义。若对于任意的 $\mathbf{x_1,x_2}\in D$ 有 $f(t\mathbf{x_1}+(1-t)\mathbf{x_2})\leqslant tf(\mathbf{x_1})+(1-t)f(\mathbf{x_2})$，$\forall t\in(0,1)$，则称 f($\mathbf{x}$)为凸区域 D 上的凸函数。如果 D 上处处严格成立不等式，则称 f($\mathbf{x}$)为凸区域 D 上的严格凸函数。

定理：设 $D\subset R^n$ 是凸区域，$f(\mathbf{x})\in C^2(D)$，则下述三命题等价：

1° f(**x**)是 D 上的凸函数；
2° $\forall$ **x₀**,**x**∈D，f(**x**)≥f(**x₀**)+f'(**x₀**)(**x**-**x₀**)；
3° $\forall$ **x₀**∈D，Hesse 矩阵 $H_f(\mathbf{x_0})$半正定。

第十五章 重积分

15.1 重积分的定义

定义：对于 1/n×1/n 的方体分割Δn，记集合 Q_n^- 为内部方体，Q_n^+ 为最小覆盖方体。如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} m(Q_n^-) = \lim\limits_{n\to+\infty} m(Q_n^+)$，则称集合 A 有面积，并将此极限定义为 A 的面积，记作 m(A)，也称 A 为 Jordan 可测集。
定义：边界线均为垂直或水平的直线段的闭区域称为简单图形。
定理：平面有界点集 A 有面积⇔ $\forall \varepsilon>0$，∃包含 ∂A 的简单图形 Q s.t. m(Q)<ε。
推论：1° A,B 有面积⇒A∪B 有面积，且当 $A^\circ \cap B^\circ = \phi$ 时，m(A∪B)=m(A)+m(B)；
2° A,B 有面积⇒A∩B 有面积；3° A,B 有面积⇒A\B 有面积；
4° A_i 有面积⇒$\bigcup\limits_{i=1}^n A_i$,$\bigcap\limits_{i=1}^n A_i$ 有面积且 m($\bigcup\limits_{i=1}^n A_i$)≤$\sum\limits_{i=1}^n m(A_i)$。
推论：平面可求长曲线的面积为 0；由有限条可求长曲线所围成的区域面积存在；闭区间上显式表达的连续曲线的面积为 0；由有限条显式表达的连续曲线所围成的区域面积存在。
定义：设 D 为平面有界可测集，将 D 分割成有限个集合 $\Delta\sigma_i$(i=1,2,⋯,n)之和，且 $\Delta\sigma_i$ 可测，$\Delta\sigma_i^\circ \cap \Delta\sigma_j^\circ = \phi$，则称Δ为 D 的一个分划，称 $\|\Delta\|$=max{diam($\Delta\sigma_i$)}为分划Δ的直径。
定义：设 D 为平面有界可测集，f(x,y)在 D 上定义，如果对于∀Δ={$\Delta\sigma_i$}$_{i=1,2,\cdots,n}$ 和 $\forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，对应的 Riemann 和极限存在且唯一，即 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)m(\Delta\sigma_i)=I$，则称 f(x,y)在 D 上可积，I 称为 f(x,y)在 D 上的二重积分，记作 $I=\iint_D f(x,y)d\sigma$ 或 $I=\iint_D f(x,y)dxdy$。D 上所有可积函数全体记为 R(D)。
定义：设Ω为空间有界可测集，将Ω分割成有限个集合 ΔV_i(i=1,2,…,n)之和，且 ΔV_i 可测，$\Delta V_i^\circ \cap \Delta V_j^\circ = \phi$，则称Δ为Ω的一个分划，称 $\|\Delta\|$=max{diam(ΔV_i)}为分划Δ的直径。
定义：设Ω为空间有界可测集，f(x,y,z)在Ω上定义，如果对于∀Δ={ΔV_i}$_{i=1,2,\dots,n}$ 和 $\forall(x_i,y_i,z_i)\in\Delta V_i$，对应的 Riemann 和极限存在且唯一，即 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i = I$，则称 f(x,y,z)在Ω上可积，I 称为 f(x,y,z)在Ω上的三重积分，记作 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$

或 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 。Ω上所有可积函数全体记为 R(Ω)。

15.2 多元函数的可积性理论与重积分的性质

定理：有界可测区域上的可积函数必有界。

定理：设 D⊂R^2 有界可测，f(x,y)于 D 上有界，则 f(x,y)∈R(D)⇔ $\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i=0\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\Delta,s.t.\overline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta)<\varepsilon\Leftrightarrow\overline{\iint_D f(x,y)d\sigma}=\underline{\iint_D f(x,y)d\sigma}$ 。

定理：设 D 是有界可测区域，E⊂D，m(E)=0，f(x,y)在 D 上有界，在 D\E 上连续，则 f(x,y)∈R(D)。特别地，连续函数必可积。

定理：设 D 是有界可测区域，f(x,y)∈R(D)，m≤f(x,y)≤M，g(z)在[m,M]上连续，则复合函数 g(f(x,y))∈R(D)。

性质：（二元可积函数）

1. 约定二重积分都是在“正区域”上进行的，$f(x,y)\le(\ge)0\Leftrightarrow\iint_D f(x,y)d\sigma\le(\ge)0$
2. 有界闭区域 D 上可积的函数 f(x,y)必在 D 上有界；
3. 有界闭区域 D 上的连续函数和分片连续函数在 D 上可积；
4. 可积函数的乘积可积；
5. 线性性、被积函数可加性、积分区域可加性；
6. 积分区域单调性、被积函数单调性；
7. 三角不等式；
8. 有界闭区域 D 上连续函数∃(x_0,y_0)∈D，s.t. $\iint_D f(x,y)d\sigma$ =$f(x_0,y_0)$m(D)。

15.3 化重积分为累次积分

定理：设函数 f(x,y)在 D=[a,b]×[c,d]上可积，且对于∀x∈[a,b]，I(x)= $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，则定积分 $\int_a^b I(x)dx$ 存在，并且 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b I(x)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ 。

定理：设 D={(x,y)|a≤x≤b，$g_1(x)$≤y≤$g_2(x)$}是 X 型区域，函数 f(x,y)在 D 上可积，且对于∀x∈[a,b]，I(x)= $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ 存在，则定积分 $\int_a^b I(x)dx$ 存在，并且

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b I(x)dx=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ 。

定理：设 D={(x,y)|c≤y≤d，$h_1(y)$≤x≤$h_2(y)$}是 Y 型区域，函数 f(x,y)在 D 上可积，且对于∀y∈[c,d]，I(y)= $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$ 存在，则定积分 $\int_c^d I(y)dy$ 存在，并且

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b I(y)dy=\int_c^d dy\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx$ 。

性质：$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}} d\sigma_{xy}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ 或 $\iint_{D_{yz}} d\sigma_{yz}\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$ 或 $\iint_{D_{xz}} d\sigma_{xz}\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$ 。【线积分+面积分】

性质：$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz\iint_{D_{xy}} f(x,y,z)d\sigma_{xy}$ 或 $\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}dx\iint_{D_{yz}} f(x,y,z)d\sigma_{yz}$ 或 $\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}dz\iint_{D_{xz}} f(x,y,z)d\sigma_{xz}$。【面积分+线积分】

15.4 重积分的变量替换

定理：设 D_{xy},D_{uv} 分别是由逐段光滑曲线围成的 xoy 平面上和 uov 平面上的有界闭区域，即边界可求长，区域可求面积。设变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$，$D_{uv}\to D_{xy}$ 是 C^1 同胚映射并设 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，$\forall$ (u,v)$\in D_{uv}$。则 T 把 ∂D_{uv} 映满边界 ∂D_{xy}。

定理：如果σ为 D_{uv} 内一个闭正方形，左下顶点为(u_0,v_0)，边长为 h，经 T 映为 D_{xy} 内以曲边梯形 T(σ)，则 m(T(σ))=$\iint_\sigma |J(u,v)|dudv$，

定理：设 C^1 同胚变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$，$D_{uv}\to D_{xy}$，$D_{uv}$,$D_{xy}$ 有界可测，f(x,y)$\in R(D_{xy})$，则 $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$。

定理：设 D_{uvw},$D_{xyz}\subset R^3$ 是有界可测区域，同胚变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w)\\z=z(u,v,w)\end{cases}\in C^1(D_{uvw})$，f(x,y,z)$\in R(D_{uvw})$，J(u,v,w)=$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$，则（三重积分的变量替换）

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{D_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw。$$

15.5 广义重积分

定义：设 $D\subset R^2$ 为一区域，$\forall$ R>0，$D\cap\{x^2+y^2<R^2\}$可测。$\{D_n\}$为一有界可测闭集列，满足 1° $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset D$；2° 任意有界闭集 $F\subset D$，存在 m 使得 $F\subset D_m$。则称$\{D_n\}$为区域 D 的一个穷竭列。

定义：如果函数 f(x,y)在 D 的任何可求面积的有界闭子区域上可积，则称 f(x,y)在 D 上内闭可积。

定义：设 D 为一个区域，$\forall$ R>0，$D\cap\{x^2+y^2<R^2\}$可测，函数 f(x,y)在 D 上内闭可积。如果对 D 的任意穷竭列$\{D_n\}$都有 $\lim_{n\to+\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$ 存在且唯一，则称积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 收敛，并定义上述积分为积分值。如果|f(x,y)|在 D 上的反常积分 $\iint_D |f(x,y)|dxdy$ 收敛，则称 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 绝对收敛。

定理：设 D 为一区域，$\forall$ R>0，$D\cap\{x^2+y^2<R^2\}$可测，函数 f(x,y)在 D 上内闭可积。

则 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 收敛的充要条件是 $\iint_D |f(x,y)|d\sigma$ 收敛。

定理：设区域 G,D⊂R^n， ∀R>0， G∩B_R,D∩B_R 可测， 同胚变换 T∈C^1(D)：G→D，x=x(u,v)， y=y(u,v)， 则 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 与 $\iint_G f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv$ 同敛散，且收敛时值相等。

定理：设 D={a<x<b,c<y<d}，f(x,y)在 D 上内闭可积。则：

1° $\int_c^d dy\int_a^b |f(x,y)|dx$ 敛 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma$ 敛且 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_a^b |f(x,y)|dx$；

2° $\int_a^b dx\int_c^d |f(x,y)|dy$ 敛 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma$ 敛且 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_c^d |f(x,y)|dy$；

3° $\int_c^d dy\int_a^b |f(x,y)|dx$ 散 or $\int_a^b dx\int_c^d |f(x,y)|dy$ 散 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma$ 散。

第十六章 曲线积分与曲面积分

16.1 第一型曲线积分

定义：设Γ是平面可求长曲线，f(x,y)在Γ上有定义，Γ的两端点为 A,B，对Γ作分割、取点。如果对任意分割法，任意取点法(ξ_i,η_i)都有 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 存在唯一，则称这一极限值为 f(x,y)在曲线Γ上的第一型曲线积分，记作 $\int_\Gamma f(x,y)ds$。当Γ为闭曲线时，也记作 $\oint_\Gamma f(x,y)ds$。

性质：1° 线性性： $\int_\Gamma k_1 f(x,y)+k_2 g(x,y)ds = k_1\int_\Gamma f(x,y)ds + k_2\int_\Gamma g(x,y)ds$；

2° 积分区域可加性： $\int_{\Gamma_1} f(x,y)ds + \int_{\Gamma_2} f(x,y)ds = \int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(x,y)ds$；

3° 无向性： $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$。

定理：当Γ可求长且 f(x,y)∈C(Γ)时， $\int_\Gamma f(x,y)ds$ 存在。

定义：如果参数式曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 满足 x(t),y(t)∈C^1[a,b]且 $x'(t)^2+y'(t)^2>0$，则称该曲线为光滑曲线。

定理：设Γ为光滑曲线， 函数 f(x,y)在Γ上连续，Γ的参数式方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$， 则

$\int_\Gamma f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$。

定理：设光滑曲线 C:x=x(t),y=y(t),z=z(t),t∈[a,b]， 函数 f(x,y,z)在 C 上连续， 则：

$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$。

16.2 第二型曲线积分

定义：设有向连续线段Γ以 A 为起点，B 为终点，记作 AB。定义在 AB 上的矢量函数 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 连续。若对任意分割法和取点法，$\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta z_i]$ 在 $\|\Delta\|\to 0$ 时都存在唯一确定的极限，则称此极限为矢量函数 $\vec{F}(x,y,z)$ 的曲线积分，记作 $\int_{AB}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$ 或 $\int_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$，其中 $\vec{F}(x,y,z)$ 称为被积向量函数，AB 称为积分路径。

性质：1° 线性性：$\int_{AB}(k_1\vec{F}+k_2\vec{G})\cdot d\vec{s}=k_1\int_{AB}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}+k_2\int_{AB}\vec{G}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$；

2° 积分区域可加性：$\int_{AB}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}+\int_{BC}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\int_{AC}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$；

3° 有向性：$\int_{AB}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=-\int_{BA}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$。

定理：设Γ=AB 是以 A 为起点，B 为终点的光滑曲线，其参数方程为Γ:x=x(t),y=y(t),z=z(t),t∈[t_0,t_1]，且当 t 从 t_0 连续变为 t_1 时，对应曲线上的点从 A 连续变为 B。再假设 P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)在Γ上连续，则 **F**=(P,Q,R)在 AB 上的第二型曲线积分存在，并且 $\int_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_{t_0}^{t_1}P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$。

注意：对切向量(dx,dy,dz)使用切向量方向余弦记法：(dx,dy,dz)=(cosα,cosβ,cosγ)ds，

$\cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$，

$\cos\gamma=\dfrac{dz}{ds}=\dfrac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$，所以 II 型曲线积分计算上类同于 I 型曲线积分：$\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\Gamma}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]ds$。

16.3 第一型曲面积分

定义：设曲面Σ的方程为连续可微函数 z=f(x,y)，其在 xoy 平面的投影是区域 D_{xy}。分割区域 D_{xy}:Δσ_1,Δσ_2,⋯,Δσ_n，作小柱体的小曲顶Δs_i，任取点(x_i,y_i)∈Δσ_i，得到点(x_i,y_i,f(x_i,y_i))∈Δs_i，过此点作 S 的切平面，此切平面在Δσ_i上的部分为ΔA_i，则Σ的面积 A≈ΣΔA_i。又设小切平面的法向量与 z 轴的夹角为γ_i，计算得到|cos γ_i|=$\left(\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}\right)^{-1}$，则 A≈Σ$\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}$ Δσ_i=$\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}d\sigma_{xy}$

定义：考虑参数式曲线Σ:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)∈D_{uv}，$\vec{r_1}=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$，

$\vec{r}_2=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$（切线方向），则|Σ|= $\iint_\Sigma|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|\,d\sigma_{uv}$ 。

定义：设函数 f(x,y,z)在分片光滑的曲面Σ上有定义，把Σ任意分割成 n 个互不重叠的小片 ΔS_i，令λ=max{diam(ΔS_i)}，并在每一小片 ΔS_i 上任取一点(x_i,y_i,z_i)，如果对任意的分割法和任意的取点法，极限 $\lim_{\lambda\to0}\Sigma f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$ 存在唯一，则称此极限值为函数 f(x,y,z)在曲面Σ上的第一型曲面积分，记作 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 。

定理：如果Σ:z=z(x,y),(x,y)∈D_{xy}，则成立

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma_{xy}\ ;$$

如果Σ:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)∈D_{uv}，则成立

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{uv}}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|\,d\sigma_{uv}\ 。$$

16.4 第二型曲面积分

定义：光滑曲面Σ上任取一点 M_0，选定在 M_0 点的Σ的一个法向量朝向。当 M_0 点连同法向量沿Σ上任意封闭曲线连续滑行一周后回到初始位置时，法向量的方向不发生改变，则称Σ为双侧曲面。否则，称Σ为单侧曲面，即存在某点、某闭曲线，使得滑行一周回来后，法向量和原来此点的法向量方向相反。

定义：设Σ⊂R^3 是分片光滑双侧曲面，若它有边界，则它的边界是由有限条光滑曲线组成。给定Σ的一侧，Σ上每点(x,y,z)处的该侧的单位法向量记为 **n**(x,y,z)，向量函数 **F**(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))在Σ上有定义。对Σ作分割 T($\Delta S_1,\cdots,\Delta S_k$)，其中 ΔS_i 是由光滑曲线为边界的小光滑曲面。记λ(T)=max{diam(ΔS_i)}，在 ΔS_i 中任取一点(x_i,y_i,z_i)，若 I= $\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\sum\limits_{i=1}^{k}\vec{F}(x_i,y_i,z_i)\cdot\vec{n}(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$ 存在唯一，则称 I 是(P,Q,R)在Σ上的第二型曲面积分，记为 $\iint_\Sigma\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS$ 。

注意：当曲面Σ是闭曲面时，通常记为 $\oint\!\!\oint_\Sigma\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS$ 。

定理：$\iint_\Sigma\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS=\iint_\Sigma\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma(P,Q,R)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$ 。

d**S**=**n**dS=(cosA dS,cosB dS,cosC dS)=(dydz,dzdx,dxdy)。cosA dS 称为 dS 在 yoz 平面上的有向投影，cosB dS 称为 dS 在 xoz 平面上的有向投影，cosC dS 在 xoy 平面上的有向投影。

注意：在计算第二型曲面积分导出的 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy\,,\Sigma:z=z(x,y)$ 时，注意区分 dxdy 与 $d\sigma_{xy}$，并考虑法线方向与 z 轴夹角导致的正负性问题。

16.5 各类积分之间的联系

定义：一个平面连通区域 D，如果 D 内任一简单闭曲线的内部总包含在 D 内。

定义：一个人沿着 D 的边界曲线上的一个方向前进时，曲线所围的区域总在他的左边，则称该方向为 ∂D 的正向。

定理：（Green 公式）设平面闭区域 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的，∂D

表示 D 的正向边界，P(x,y),Q(x,y)∈C^1(D)，则有：

1° $\oint_{\partial D} Pdx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} d\sigma$，$\oint_{\partial D} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma$；2° $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma$。

定理：（Gauss 公式）设有界闭区域Ω⊂R^3，其边界曲面（外侧）∂Ω是分片光滑的，P,Q,R,$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$∈C(Ω)，则有$\oiint_{\Omega}(P,Q,R)\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot(P,Q,R)dv$。

定理：（Stokes 公式）设光滑双侧曲面Σ有界有边含于空间区域Ω，其边界∂Σ由有限条分段光滑曲线组成，并且Σ的正侧与边界∂Σ正向按右手法则取定，函数 P,Q,R∈C^1(Ω)，则有

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy。$$

即 $\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}$。

16.7 曲线积分与路径的无关性

定义：平面连通区域 D，如果 D 内任一简单闭曲线能收缩成 D 中一点，则称该区域是单连通的。空间连通区域Ω，如果Ω内任一简单闭曲线能收缩成Ω中一点，则称该区域是单连通的。如果区域Ω内的任何闭曲线都可以张成(至少)一张完全属于Ω的曲面，则称Ω为线单连通区域。

定理：设 D 为区域，函数 P(x,y),Q(x,y)∈C(D)，则∀A,B∈D，$\int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关⇔ $\oint_C Pdx + Qdy$ =0 对任意闭曲线⊂D 成立。

定理：设 D 为区域，函数 P(x,y),Q(x,y)∈C(D)，则∀A,B∈D，$\int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关⇔存在定义在 D 上的可微函数 u=u(x,y)使得 du=Pdx+Qdy。

定理：设 D 为单连通区域，$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$∈C(D)，则∀A,B∈D，$\int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关⇔ $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \forall (x,y)\in D$。（联系 Green 公式）

定理：设Ω是线单连通区域，P,Q,R∈C^1(Ω)，**F**=(P,Q,R)，则$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$，∀闭曲线 L⊂Ω⇔ $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关，∀A,B∈Ω⇔∃u，du=Pdx+Qdy+Rdz，**F**=(P,Q,R)=u'⇔ rot **F**=0⇔ **F** 是有势场⇔ **F** 是无旋场。

定理：设 P,Q,R∈C^1(Ω)，**F**=(P,Q,R)，则积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ 只与∂Σ 有关

$\Leftrightarrow \oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$，任意闭曲面 S $\Leftrightarrow$ div **F**=0，if Ω单连通。这是因为 div(rot **F**)=0。

16.8 场论简介

定义：将 $(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$ 定义为向量函数 **F**(x,y,z)=(P(x,y,z), Q(x,y,z),R(x,y,z))的旋度，将 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 定义为向量函数 **F**(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z), R(x,y,z))的散度，分别记作 **rot F**=$\nabla\times\mathbf{F}$ 和 **div F**=$\nabla\cdot\mathbf{F}$ 。

定理：（Green 公式）$\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot d\vec{s}=\iint_D rot\,\vec{v}\,d\sigma$；（Gauss 公式）$\iiint_D\nabla\cdot\vec{v}\,dV=\oiint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$；（Stokes 公式）$\iint_D rot\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot d\vec{s}$ 。

定义：设 D 为区域，u(x,y)∈C^2(D)。若函数 u 在 D 上满足$\Delta u=0$，则称 u(x,y)是 D 上的调和函数，方程$-\Delta u=0$ 称为 Laplace 方程或调和方程。

定理：设闭区域 D 是由有限条逐段光滑的曲线围成的，u=u(x,y),v=v(x,y)∈C^2(D)，则有：1° $\iint_D\Delta u d\sigma=\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds$；2° $\iint_D v\Delta u d\sigma=-\iint_D\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}d\sigma+\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}ds$；

3° $\iint_D v\Delta u-u\Delta v d\sigma=\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}ds$（Green 第二公式）。

第十七章 含参变量积分

17.1 含参变量定积分

定理：设函数 f(x,y)在区域 D=[a,b]×[c,d]上连续，则对于任意 x∈[a,b]，含参变量积分 I(x)=$\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，并且 I(x)在区间[a,b]上连续。【极限顺序可交换】

定理：f(x,y)∈C(D)，$h_1(x),h_2(x)$∈C[a,b]，F(x,y)=$\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}f(x,y)dy$，则 F(x,y)∈C(D)。

定理：f(x,y),f_x'(x,y)∈C(D)，则 I(x)=C^1[a,b]且 I'(x)=$\int_c^d f_x'(x,y)dy$ 。

定理：f(x,y),f_x'(x,y)∈C(D)，$h_1(x),h_2(x)$∈D[a,b]，则 J(x)=$\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}f(x,y)dy$ ∈D[a,b]，且 J'(x)=$\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}f_x'(x,y)dy-f(x,h_1(x))h_1'(x)+f(x,h_2(x))h_2'(x)$ 。

定理：f(x,y)∈C(D)，则对任意 z∈[a,b]有 $\int_a^z\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^z f(x,y)dx\right]dy$ 。

17.2 含参变量广义积分

定义：若$\forall\varepsilon>0$，∃A_0>c 使得$|\int_A^{+\infty}f(x,y)dy|<\varepsilon$，∀x∈[a,b]，∀A>$A_0$，则称 $\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 关于 x 在[a,b]上一致收敛。

定理：【Dirichlet 判别法】设 1° ∃M＞0，使得$|\int_c^A f(x,y)dy|$≤M，∀A＞c，∀x∈E，即是关于 x 及 A 一致有界；2° 对任意固定的 x∈E，g(x,y)关于 y 单调，且 g(x,y)$\rightrightarrows$0 (y⟶+∞，x∈E)；则$|\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy|$对 x∈E 一致收敛。

定理：【Abel 判别法】设 1° $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于 x∈E 一致收敛；2° 对任意固定的 x∈E，g(x,y)关于 y 单调，且∃M＞0，使得|g(x,y)|≤M，∀x∈E，y∈[c,+∞)；则$|\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy|$关于 x∈E 一致收敛。

定理：设 f(x,y)在 a≤x≤b，c≤y＜+∞上连续，积分 I(x)=$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于 x∈[a,b]一致收敛，则 I(x)∈C[a,b]。

定理：设 f(x,y)在 a≤x≤b，c≤y＜+∞上连续，积分 I(x)=$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于 x∈[a,b]一致收敛，则$\int_a^b\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx=\int_c^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$。

定理：设 f(x,y),f_x'(x,y)在 a≤x≤b，y≥c 上连续，存在 x_0∈[a,b]使得$\int_c^{+\infty} f(x_0,y)dy$收敛，积分$\int_c^{+\infty} f_x'(x,y)dy$关于 x∈[a,b]一致收敛到 g(x)，则 I(x)=$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于 x∈[a,b]一致收敛，且 I'(x)=$\int_c^{+\infty} f_x'(x,y)dy$。

定理：设 f(x,y)在 a≤x≤b，y≥c 上连续非负，∀x∈[a,b]，I(x)=$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$收敛，且 I(x)∈C[a,b]，则$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于 x∈[a,b]一致收敛。

定理：设 f(x,y)在 x≥a，y≥c 上连续，且$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于 x∈[a,+∞)内闭一致收敛，$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$关于 y∈[c,+∞)内闭一致收敛，$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy$与$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$有一存在，则$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy=\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$。

定理：设 f(x,y)在 x≥a，y≥c 上连续非负，$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy,\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$分别关于 x,y 连续，$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy$与$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$有一存在，则$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy=\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$。

15.3 Γ函数与 B 函数

定义：称$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ (s＞0)为 Gamma 函数。

性质：1. Γ(s+1)=sΓ(s)，从而Γ(s)=(s-1)!；2. Γ(s)=$2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}e^{-x^2}dx$；3. Γ(s)∈$C^\infty$(0,+∞)；

4. $\Gamma(s)$是$(0,+\infty)$内的严格凸函数。

定义：称 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ (p,q＞0)为 Beta 函数。

性质：1. B(p,q)=B(q,p)；2. $B(p,q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$；

3. $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$；4. $B(p,q)=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\ (x=\dfrac{t}{1+t})$。

性质：1. $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$；2. $B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$。