数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 2 月 21 日

目录

1　第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

1.1　问题

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 试证明 $f(x)\in R[a,b]$ 的充要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists[a,b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x)\le f(x)\le h(x),\forall x\in[a,b]$; (2) $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$.

3. 函数 $g(x)\in R[a,b], f(u)\in C[A,B]$, 这里 A,B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x))\in R[a,b]$.

4. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 证明存在点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

5. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)>0$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

6. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a,b]$, $\displaystyle\lim_{h\to0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x=0$.

7. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p\|g\|_q\ge\|fg\|_1$.)

[一个简单应用, 留作思考题] $0<q\le p\le s\le\infty$, 那么存在 $\theta\in[0,1]$ 使得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\theta}{q}+\dfrac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p\le\|f\|_q^\theta\|f\|_s^{1-\theta}$.

8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\displaystyle\left(\int_a^b(f+g)^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p+\|g\|_p\ge\|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)

■ 自由选讲.

9. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

11. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.

12. $n\in\mathbb{N}_+, f(x)\in C[a,b], \displaystyle\int_a^b x^kf(x)\mathrm{d}x=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2　解答

1. $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\varepsilon)<a_n<n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\varepsilon$, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\le\dfrac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\le\dfrac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}\displaystyle\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n(\frac{i}{n})^\alpha\le\varepsilon\int_0^1x^\alpha\mathrm{d}x+\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\alpha+1}+\varepsilon\le2\varepsilon$. 这意味着 $\left|\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i-\sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\le4\varepsilon\Rightarrow$ 原极限 $=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

2. 必要性: $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\omega_i(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 阶梯函数 $s_1(x),s_2(x)$ 满足 $s_1(x)\le f(x)\le s_2(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[s_2(x)-s_1(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 连续函数 $g(x),h(x)$ 满足 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]<\varepsilon$.

充分性: $g(x)$ 连续, $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow\exists$ 分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}h(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}g(x)\right](x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}+w_i^g\right](x_i-x_{i-1})\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall\delta>0,\exists\tau>0$ s.t. $\forall|x-x'|<\tau,|f(x)-f(x')|<\delta$. 从而 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1},x_i]:w_i^{f\circ g}>\delta\}\subset\{[x_{i-1},x_i]:w_i^g>\tau\}$, 从而 $\sum\limits_{w_i^{f\circ g}>\delta}(x_i-x_{i-1})\le\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$, 即 $f\circ g$ 可积.

4. 由 $f(x)\in R[a,b]$ 知存在 $[a_1,b_1]\subset(a,b)$, 使得 $w^f_{[a_1,b_1]}<1$. 同样的道理, 由 $f(x)\in R[a_1,b_1]$ 知存在 $[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$ 使得 $w^f_{[a_1,b_1]}<\dfrac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于 $w^f_{[a_n,b_n]}<\dfrac{1}{n}$, 只需取 $x_0\in\cap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0\in(a,b)$, 因此 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$, $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\ge f(x_0)\delta>0$.

6. $\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\displaystyle\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此 $\displaystyle\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^b[f(x+h)-g(x+h)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x+h)-g(x)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\le 2\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x$. 由一致连续性知 $\exists H>0$ s.t. $\forall x,x'\in[a,b+1],|x-x'|<H$, 有 $|g(x)-g(x')|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h<H$ 知 RHS $<\varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\displaystyle\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\le\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\le\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\dfrac{1}{p},1-\alpha=\dfrac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\le\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\Rightarrow\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\left(\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\displaystyle\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x=\int_a^b(f+g)^{p-1}f\mathrm{d}x+\int_a^b(f+g)^{p-1}g\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right)$. 然后消去相同因子.

9. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0$, s.t. $\omega_{(x-\delta_x,x+\delta_x)}<\varepsilon$. 由开覆盖 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\le x_1<\cdots<x_n\le b$. 可取分割点 $y_0=a,y_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1}),y_n=b$. 对于这个分割, $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^n\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\le\varepsilon(b-a)$, 由 ε 的任意性知 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 考虑 $f(x)=\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=0$, 但是 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

11. 原式 $=2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left(\int_0^2 x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\dfrac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1. $\displaystyle\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2. 依此类推, $\displaystyle\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.