第三章 • 坐标变换与二次曲面的分类

3.1 仿射坐标变换的一般理论

旧坐标系 $I=\left[O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right]$，新坐标系 $I'=\left[O',\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}'\right]$，记坐标系 I 到 I'的为过渡矩阵 $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $(|C|\neq 0)$，我们有 $(\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}')=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$和

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$，其中$(d_1,d_2,d_3)^T$是新坐标系原点 O'在旧坐标系下的坐标。特别地，当坐标变换为**直角坐标变换**时（直角坐标系➞直角坐标系），我们有 C 为**正交矩阵**（即 $C^TC=I$）。

*坐标系 I 到 I'的为过渡矩阵为 C，则坐标系 I'到 I 的为过渡矩阵 C^{-1}。由于常见的坐标变换是直角坐标变换，我们可以直接将 C **转置为 C^T** 即可求得 C^{-1}。

**在很多题目中，坐标变换往往是直角坐标变换，并且新坐标轴由旧坐标轴的对应方程给出（或者由题意很容易发现新坐标轴位置）：

$x':\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$；$y':\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$（若题目给出直线的标准方程，则用旧基表示新基更为简单，这里不做讨论）。

我们可以先算出向量的变换公式以求得过渡矩阵：

$\vec{e_1}'=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{e_1}+(c_1a_2-a_1c_2)\vec{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e_3}$（并对其单位化）；

$\vec{e_2}'=(b_3c_4-c_3b_4)\vec{e_1}+(c_3a_4-a_3c_4)\vec{e_2}+(a_3b_4-b_3a_4)\vec{e_3}$（并对其单位化）；

$\vec{e_3}'=\vec{e_1}'\times\vec{e_2}'$。

再联立 x'和y'算出新坐标轴原点 O' 在旧坐标轴下的坐标即得坐标变换公式。

一般情况下，新坐标系下的图形方程较为规整，所以我们需要反过来求出 I'到 I 的过渡矩阵 C^T（**直角坐标变换特有！**）。我们有

$\begin{pmatrix} x-d_1 \\ y-d_2 \\ z-d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$，两边左乘 C^T(即 C^{-1})得到 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\left(C^T\right)_{3\times 3}\begin{pmatrix} x-d_1 \\ y-d_2 \\ z-d_3 \end{pmatrix}$。这就是我们要求的坐标变换等式。将此公式代入新坐标系下的曲面方程得到原坐标系下的方程，这也是很多题目要我们求解的东西。

3.2 二次曲线的类型

平面上二次曲线 $F(x,y)=0$：$a_{11}x^2+\mathbf{2}a_{12}xy+a_{22}y^2+\mathbf{2}b_1x+\mathbf{2}b_2y+c=0$；

即 $X^TAX+2B^TX+C=0$。其中 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

$A_{2\times2}$ 是二次项矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，是**对称矩阵**，有 $\mathbf{A^T=A}$。

$B_{2\times1}$ 是一次项矩阵 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$C_{1\times1}$ 是常数项矩阵。

在可逆线性变量替换中，每一项矩阵的乘积均是 **1×1 矩阵**，均可以任意做**转置**以合并同类项。即对于某一个直角坐标变换公式 $X=HY+\eta$；我们有：

$G(Y)=F(HX+\eta)=\mathbf{Y^T(H^TAH)Y+2(A\eta+B)^THY+(\eta^TA\eta+2B^T\eta+C)=0}$。

我们这里只讨论较为复杂的转轴变换，移轴变换留给读者自行讨论。
在转轴变换中，我们的目标是求出某个矩阵 H，使得新二次项矩阵 H^TAH 为**对角矩阵**，以消除 xy 这一交叉项。
法 1：特征值（补充）
设 $X=HY$，H 为正交矩阵，则 $G(Y)=F(HY)=Y^TH^TAHY+2(H^TB)Y+C=0$。此时方程中无形如 xy 的交叉项，即 H^TAH 为对角矩阵。设 $H^TAH=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，H 的列向量组为$\eta_1,\eta_2$，等式两边左乘 H 得 $A(\eta_1,\eta_2)=(A\eta_1,A\eta_2)=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2)$,有 $A\eta_1=\lambda_1\eta_2$, $A\eta_2=\lambda_2\eta_2$。

特征值定义：$\mathbf{A\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$，$\lambda$称为 **A** 的一个特征值，$\boldsymbol{\eta}$称为 **A** 的一个特征向量。

特征值求解 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|\boldsymbol{\eta}=0$ 有非零解，所以$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$，即$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+|\mathbf{A}|=0$（**特征方程**）。设该方程的两个解为$\lambda_1,\lambda_2$，对应的解向量为$\eta_1,\eta_2$（**单位向量**），则过渡矩阵 $H=(\eta_1,\eta_2)$，$F(X)$转化为 $G(Y)=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+2(B^T\eta_1)x+2(B^T\eta_2)y+C=0$。
法 2：转角（课本）
每一个 2 阶的正交矩阵均可以表示为$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$（右手）或$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$（左手）。直接套用转角公式：$\cot2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$。

附 二次曲线、二次曲面分类

二次曲线标准类型（7 种）			
椭圆	$\pm(a^2x^2+b^2y^2-c^2)=0$	双曲线	$\pm(a^2x^2-b^2y^2+c)=0$
抛物线	$\pm(a^2x^2+2by)=0$	单点集	$\pm(a^2x^2+b^2y^2)=0$
平行直线	$\pm(a^2x^2-b^2)=0$	一条直线	$\pm a^2x^2=0$
相交直线	$\pm(a^2x^2-b^2y^2)=0$		

二次曲面标准类型（14 种）	
椭球面	$\pm(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-d^2)=0$
双叶双曲面	$\pm(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2+d^2)=0$
单叶双曲面	$\pm(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2-d^2)=0$
双曲抛物面	$\pm(a^2x^2-b^2y^2+2cz)=0$
椭圆抛物面	$\pm(a^2x^2+b^2y^2+2cz)=0$
双曲柱面	$\pm(a^2x^2-b^2y^2+c)=0$
抛物柱面	$\pm(a^2x^2+2by)=0$
椭圆柱面	$\pm(a^2x^2+b^2y^2-c^2)=0$
相交平面	$\pm(a^2x^2-b^2y^2)=0$
平行平面	$\pm(a^2x^2-b^2)=0$
一张平面	$\pm a^2x^2=0$
椭圆锥面	$\pm(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2)=0$
一条直线	$\pm(a^2x^2+b^2y^2)=0$
单点集	$\pm(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0$

3.3 用方程的系数判别二次曲线的类型、不变量

我们应该注意: 以下不变量仅在直角坐标变换中不改变值，半不变量在 $I_2=0$，$I_3=0$ 时不改变值。

不变量：$I_1 = a_{11} + a_{22}$ ；$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ ；$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$ ；

半不变量：$K_1 = I_3\begin{pmatrix} 1,3 \\ 1,3 \end{pmatrix} + I_3\begin{pmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{pmatrix}$。

不变量 I_2	曲线种类	标准方程	进一步区分
$I_2>0$	椭圆型曲线	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$I_1I_3<0$，椭圆
			$I_1I_3>0$，虚椭圆
			$I_3=0$，点
$I_2<0$	双曲型曲线	λ_1,λ_2 是方程 $x^2-I_1x+I_2=0$ 的两个解	$I_3\neq0$，双曲线
			$I_3=0$，相交直线
$I_2=0$	抛物型曲线	$(I_3\neq0)\quad I_1y^2\pm2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}x=0$	$I_3\neq0$，抛物线
		$(I_3=0)\quad I_1y^2+\frac{K_1}{I_1}=0$	$K_1>0$，虚平行直线
			$K_1=0$，一条直线
			$K_1<0$，平行直线

3.4 圆锥曲线的仿射特征

平面上二次曲线 $F(x,y)=0$：$a_{11}x^2+\mathbf{2}a_{12}xy+a_{22}y^2+\mathbf{2}b_1x+\mathbf{2}b_2y+c=0$；
仿射特征的定义：在仿射坐标变换下不改变性质的特征。

引入 $F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+b_1$；$F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+b_2$；$F_3(x,y)=b_1x+b_2y+c$。

我们有 $F(x,y)=xF_1(x,y)+yF_2(x,y)+F_3(x,y)$。

i）直线与二次曲线与二次曲线的渐进方向、开口朝向

设 $l=\begin{cases}x=x_0+tm\\ y=y_0+tn\end{cases}$ （t为参数），联立二次曲线Γ，则 $F(x_0+tm,y_0+tn)=0$，展开得

$\varphi(m,n)t^2+2[mF_1(x_0,y_0)+nF_2(x_0,y_0)]t+F(x_0,y_0)=0$。（3.0）（**相交方程**）

其中$\varphi(m,n)=a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2$。$\triangle_{\varphi(m,n)}=-4I_2$。

*$\varphi(m,n)\neq 0$：根据$\triangle_{(3.0)}$的正负判断交点个数。其中$\triangle_{(3.0)}=0$ 时，记为l与Γ**相切**。

相切的充分必要条件是$\mathbf{[mF_1(x_0,y_0)+nF_2(x_0,y_0)]^2=\varphi(m,n)F(x_0,y_0)}$。

**讨论相切情形。①求过二次曲线上点 $M(x_0,y_0)$切线，直线l与Γ的相交方程只有零解。$F(x_0,y_0)=0$ 恒成立，一次项系数恒为 0，有 $m:n = -F_2(x_0,y_0):F_1(x_0,y_0)$。

利用 M 在曲线上，求得切线方程为 $\mathbf{F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y+F_3(x_0,y_0)=0}$。

②求平行于某个非渐进方向 **u**=(m,n)的切线，切点(x,y)满足方程：

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\ mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0\end{cases}。$$

③求过二次曲面外点 $M(x_0,y_0)$切线，切点(x_1,y_1)满足方程：

$$\begin{cases}F(x_1,y_1)=0\\ F_1(x_1,y_1)x_0+F_2(x_1,y_1)y_0+F_3(x_1,y_1)=0\end{cases};$$

***$\varphi(m,n)=0$：此时直线的方向向量 **u**(m,n)记为该曲线的**渐进方向**。易知椭圆**型**曲线无渐进方向，抛物**型**曲线有一个渐进方向，双曲**型**曲线有两个渐进方向。

****①方程 $F(x,y)=0$ 表示**双曲线**时，沿渐进方向且与双曲线没有交点的直线l称为双曲线的**渐近线**。由定义，渐近线的一般方程为 $mF_1(x,y)+nF_2(x,y)=0$。显然，双曲线的中心落在渐近线上（后面有关于中心的详细解释）。故双曲线的渐近线

为过双曲线的中心，平行于渐进方向的直线。

****②方程 $F(x,y)=0$ 表示**抛物线**时，此时 $I_2=0$，$I_3\neq 0$，$\varphi(m,n)$可以化简为 $(a_{11}m+a_{12}n)^2=0$。我们有$(m,n)=(a_{12},-a_{11})$为抛物线**开口朝向**(显然开口朝向与渐进方向平行)的充分必要条件为 $I_1(a_{12}b_1-a_{11}b_2)<0$。(若 $a_{12}b_1-a_{11}b_2=0$,该曲线为退化的抛物线：平行直线/虚平行直线/一条直线)

ｉｉ)曲线的中心

中心定义: 无论 $\mathbf{u}=(m,n)$如何选取，方程(3.0)两个解(关于 t)的和均为 0（这个中心是经过它的每条直线的中点）。则方程的一次项系数恒为 0（与 m、n 的取值无关）。这表明 $F_1(x_0,y_0)=0$，$F_2(x_0,y_0)=0$。即曲线的中心(x_0,y_0)是方程组 $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+b_1=0\\ a_{12}x+a_{22}y+b_2=0\end{cases}$的解。注意到该方程组的系数矩阵为$|\mathbf{A}|=I_2$。

当曲线为双曲或椭圆**型**曲线时，$I_2\neq 0$，方程组有唯一解。这表明这两种曲线有唯一的中心，是**中心型曲线**。

当曲线为抛物**型**曲线时，$I_2=0$，方程组有无穷多组解或无解。前者的中心构成一条直线，后者没有中心。这表明抛物型曲线是**非中心型曲线**。

ｉｉｉ）直径与共轭

取定一个向量 $\mathbf{u}=(m,n)$，则所有方向向量为 $\mathbf{u}$ 的直线的中点(x_0,y_0)满足方程 $mF_1(x_0,y_0)+nF_2(x_0,y_0)=0$（这是因为关于 t 的方程的解之和为 0）。化简得到 $(ma_{11}+na_{12})x_0+(ma_{12}+na_{22})y_0+(mb_1+nb_2)=0$。

如果 $ma_{11}+na_{12}$ 和 $ma_{12}+na_{22}$ 不同时为 0（即：不为抛物线的渐进方向；不恒仅有一个交点)，易知这个方程表示一条直线l_u，称为 u 所代表的方向关于Γ的**共轭直径**。l_u的方向向量 $\mathbf{v}=(m',n')$满足 $m'(ma_{11}+na_{12})+n'(ma_{12}+na_{22})=0$，即 $(m',n')A\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=0$。显然 **u** 和 **v** 是对称的，即 **v** 的共轭直径l_v平行于 **u**。我们称l_u和l_v为一对互相共轭的**共轭直径**。共轭直径都过二次曲线的中心（如果它有)。

总结：直线与二次曲线的相交方程为：

$$\underbrace{\varphi(m,n)}_{\text{渐进方向}}t^2+2[\underbrace{mF_1(x_0,y_0)+nF_2(x_0,y_0)}_{(m,n)\text{方向的共轭直径};\ F_1\text{和}F_2\text{全为0是中心}}]t+F(x_0,y_0)=0$$

并且有每条共轭直径过中心; 每条渐近线过中心、平行于渐进方向(如果它有中心)。根据△判断相交状态。

3.5 圆锥曲线的度量特征

1. 抛物线的对称轴与顶点

我们知道$u=(a_{12},-a_{11})$表示抛物线的渐进方向，则与u正交的向量$v=(a_{11},a_{12})$的共轭直径便是抛物线的对称轴。即$(a_{11}^2+a_{12}^2)x+(a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22})y+a_{11}b_1+a_{12}b_2=0$，化简得到$a_{11}x+a_{12}y+\dfrac{a_{11}b_1+a_{12}b_2}{I_1}=0$。

顶点即为抛物线对称轴与抛物线的交点。

2. 椭圆与双曲线的对称轴

我们称$u=(m,n)$为某中心型曲线的**主方向**，如果u与它的共轭方向垂直。

经过曲线中心，平行于主方向的直线便是该曲线的对称轴。

$(m',n')A\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=0$中的$(m,n)$与$(m',n')$垂直。我们必有$A\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$。这就回到了前面讲过的特征值法。求出$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$的两个特征值解，并求出对应的两个特征向量解。这两个向量便是该曲线的主方向。求出中心坐标，对称轴易得。

3. 二次曲面的对称平面

一个二次曲面的一般方程为$(x,y,z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+2(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+c=0$。

我们记$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，上式改写为$X^TAX+2B^TX+C=0$

引入$F_1(x,y,z)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+b_1$；$F_2(x,y,z)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+b_2$

$F_3(x,y,z)=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+b_3$；$F_4(x,y,z)=b_1x+b_2y+b_3z+c$。

类似于平面的定义与公式：

我们称二次曲面的**渐进方向**为满足$X^TAX=0$方程的解向量$u=(x,y,z)$。

我们称向量$u=(p,q,r)$的**共轭平面**为$pF_1(x,y,z)+qF_2(x,y,z)+rF_3(x,y,z)=0$。

曲面上一点$K(x_0,y_0,z_0)$的**切平面**为

$F_1(x_0,y_0,z_0)x+F_2(x_0,y_0,z_0)y+F_3(x_0,y_0,z_0)z+F_4(x_0,y_0,z_0)=0$。

曲面的中心与对称平面均类似于曲线的定义。

第三章经典好题：

1. 求经过点$(-2,-1)^T$和$(0,2)^T$且以直线 $x+y+1=0$、$x-y+1=0$ 为对称轴的二次曲线的方程。

2. 给定方程$(A_1x+B_1y+C_1)^2-(A_2x+B_2y+C_2)^2=1$，其中 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$，证明它表示一条双曲线，并且求出它的渐近线。（提示：先判断 I_2 正负，再根据渐近线与原方程不同排除一对相交直线的情况）

3. 判断下列二次曲线的类型，并求出它所有的仿射特征与度量特征（中心、渐近方向、渐近线、开口朝向、对称轴，有什么求什么）。

(1)$6xy+8y^2-12x-26y+11=0$

(2)$x^2+2xy+y^2-8x+4=0$

(3)$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$

(4)$x^2+xy-2y^2-11x-y+28=0$

4. 按参数λ的值讨论下述曲线的类型：$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$。

5. 已知△ABC，E 是边 AB 的中点，抛物线与边 CA,CB 分别在点 A,B 相切，证明：EC 与抛物线的对称轴平行。

6. 证明：若 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_0=0$ 表示一条双曲线，则它的渐进线是 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$。

7. 求 $3x^2+4xy+2y^2+8x+4y-6=0$ 的互相垂直的切线的交点的轨迹。

参考答案：

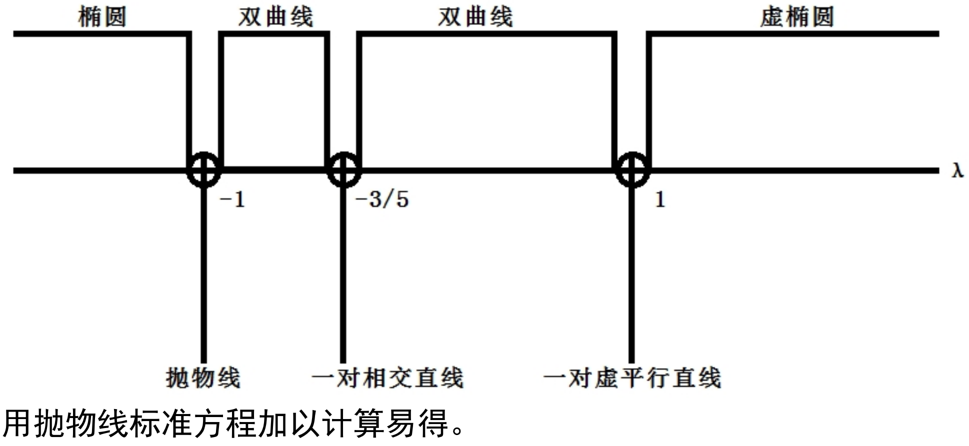
1. $x^2+xy+y^2+2x+y-2=0$.

2. $(A_1\pm A_2)x+(B_1\pm B_2)y+(C_1\pm C_2)=0$.

3.

序号	曲线类型	中心	渐进方向	渐近线	开口朝向	对称轴
1	双曲线	(-1,2)	(1,0) (8,-3)	y=2 3x+8y-13=0	×	3x-y+5=0 x+3y-5=0
2	抛物线	×	(1,-1)	×	(1,-1)	x+y-2=0
3	椭圆	(1,1)	×	×	×	x+y-2=0 x-y=0
4	相交直线	(5,1)	(1,1)(-2,1)	×	×	数据太难看

4.



5. 用抛物线标准方程加以计算易得。

6. 易证。

7. $(x+2)^2+(y-1)^2=30$。

第四章・保距变换与仿射变换

4.1 平面的仿射变换与保距变换

1. 一一对应与可逆变换

一个集合 X 到自身的映射称为 X 上的一个**变换**，称 X 上把每一点变为自身的变换为 X 的**恒同变换**，记做 $\mathrm{id}_X:X\to X$。

请读者注意：变换一定是**自身到自身**的一个映射。

对于一个映射 $f:X\to Y$，我们定义

单射：$x\neq y\to f(x)\neq f(y)$或$f(x)=f(y)\to x=y$。

满射：$f(y)=Y$；$\forall y\in Y,\exists x\in X,s.t.f(x)=y$。

双射：既单又满。一般判定双射需要分开单射、满射判定。

可逆映射：存在 f^{-1}，使得 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X,f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_Y$。双射$\Leftrightarrow$可逆映射。

可逆变换：$f:X\to X$，且是可逆映射。

例：貌似下面提到的变换都可逆

2. 平面上的变换群

变换群：一个集合 G：**任何元素都是可逆变换**，且逆都在 G 中；任何元素的复合都在 G 中，

例：id（最小的变换群）、某个反射与 id、所有可逆变换（最大的变换群）

3. 保距变换（我们只讨论平面的保距变换）

定义：一个变换 f 满足任意两点 A,B，都有 $d\big(f(A),f(B)\big)=d(A,B)$。

例：平移、旋转、反射、滑反射（实际上只有这四种）

保距变换把直线变到直线，保持直线夹角不边，平行直线变成平行直线。

容易知道：

I　**保距变换可逆**；

II　**保距变换可复合**；

所以构成一个**保距变换群**。

4. 仿射变换（我们只讨论平面的仿射变换）

定义：把共线点组映成共线点组。

例：位似变换、相似变换、错切变换

仿射变换推论：如果 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{f(A)f(B)}=\overrightarrow{f(C)f(D)}$；仿射变换把直线变成直线，并保持直线的平行性。

换言而知：可以定义一个向量变换 f_u，使得 $f_u(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}$。

保距变换一定是仿射变换。

容易知道：

I　**仿射变换可逆**；

II　**仿射变换可复合**；

所以构成一个**仿射变换群**。

4.2 仿射变换基本定理

定理：仿射变换决定的向量变换具有线性性质，即：

$$\forall\alpha,\beta\in R^2, f(\alpha\pm\beta)=f(\alpha)\pm f(\beta);\forall\alpha\in R^2,\lambda\in R, f(\lambda\alpha)=\lambda f(\alpha).$$

推论：仿射变换保持共线三点的简单比。

仿射变换基本定理：

（1）仿射变换 $f:\pi\to\pi$ 把一个坐标系 I 搬到另一个坐标系 I'，且坐标不变；

（2）两个坐标系 I、I'，存在仿射变换 f 把 I 搬到 I'。

保距变换：平移、旋转、反射的复合

Γ 和 Γ' 是同类二次曲线的充要条件是存在仿射变换 f，s.t. $f(\Gamma)=\Gamma'$。

仿射变换下，所有图形面积的变化率相同，即 $f(S)=\sigma S$。这个 σ 称为**变积系数**。

每一个仿射变换都可以分解为一个保距变换和两个正压缩的乘积。

4.3 用坐标法研究仿射变换

设 I 到 I' 的过渡矩阵是 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$。我们设 $f(O)_I=B$。由于 $X=AX'+B$，而 $f(P)_{I'}=P_I$，所以 $f(P)$ 在仿射坐标系 I 下的坐标变换公式是 $X'=AX+B$。此公式称为仿射变换 f 在仿射坐标系 I 中的**点变换公式**，矩阵 A 是 f 在仿射坐标系 I 中的**变换矩阵**。类似地得到仿射变换的**向量变换公式**：$X'=AX$。

！！！虽然坐标变换公式和仿射变换公式长的几乎一样，但是我们必须注意: 坐标变换公式中，X' 指的是**新坐标系**下点/向量的坐标；而仿射变换公式中，X' 指的是在**旧坐标系**下点/向量仿射变换后的坐标。它们的本质区别很大。

变换矩阵的性质：

*同一个仿射变换 f 对不同坐标系的运用不改变他们之间的**过渡矩阵**，即 $I\xrightarrow{H}I'$，$f(I)\xrightarrow{H}f(I')$。（右图）

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "H"'] & f(I) \arrow[d, "H"] \\ I' \arrow[r, "f"] & f(I') \end{tikzcd}$$

*的推论：仿射变换 f 把 I 变到 I'，则 f 在 I' 下的变换矩阵与 f 在 I 下的变换矩阵相同。

**如果仿射变换 f,g 在仿射坐标系 I 中的变换矩阵分别是 A 和 B，则 $g\circ f$ 在 I 中的变换矩阵是 BA。（右图）

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "g"', "B"] & f(I) \arrow[d, "g"', "?"] \\ g(I) \arrow[r, "f", "A"'] & g(f(I)) \end{tikzcd}$$

***如果仿射变换 f 在仿射变换系 I 中的变换矩阵是 A，I 到仿射坐标系 I' 的过渡矩阵为 H,则 f 在 I' 中的变换矩阵为 $H^{-1}AH$。即: $I'\xrightarrow{H^{-1}}I\xrightarrow{A}f(I)\xrightarrow{H}f(I')$。

****一个仿射变换 f 在不同坐标系中的变换矩阵相似，且行列式相等。

变换矩阵 det A＞0，称 f 是**第一类（保定向）仿射变换**；

反之，则称 f 是**第二类（反定向）仿射变换**。

仿射变换的变积系数等于它的变换矩阵的行列式的绝对值。（叉乘证明）

仿射变换的不动点与特征向量：

特征向量：$u // f(u)$；特征值：$|A-\lambda I|=0$；不动点：$P=f(P)$。

特征向量与特征值：$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0\end{cases}$；不动点：$\begin{cases}(a_{11}-1)x+a_{12}y+b_1=0\\ a_{21}x+(a_{22}-1)y+b_2=0\end{cases}$。

$|A-\lambda I|=0$ 是关于 λ 的一元二次方程，其中 $\Delta=(a_{11}+a_{22})^2-4|A|=0$。

第一类仿射变换最多有两个特征值，第二类仿射变换**一定**有两个特征值。（△）

保距变换的变换公式：

保距变换的变换矩阵一定是正交矩阵。

平面上第一类保距变换满足 detA= 1，或者是旋转，或者是平移。

平面上第二类保距变换满足 detA= −1，或者是反射，或者是滑反射。

判断保距变换为平移、旋转、反射、滑反射的方法：

1. 正交矩阵：detA=1 则平移 or 旋转；detA= −1 则反射 or 滑反射。
2. 不动点：平移无不动点，旋转有且唯一；反射不动点无穷，滑反射无不动点。

求平移量，旋转中心、转角，反射轴线，滑反射轴线、滑动量的方法：

1. 平移量：抽两个点出来看。
2. 旋转中心：即不动点；转角：抽两个点出来看。
3. 反射轴线：不变直线。
4. 滑反射轴线：不变直线；滑动量：抽不变直线上的点出来看。

求不变直线：点 p 和点 f(p)连线中点的轨迹。

附 仿射变换的一些性质

仿射变换的逆、复合都是仿射变换。（构成一个仿射变换群，它跑不出去的！）

仿射变换把共线三点变成共线三点，不共线三点变成不共线三点。

仿射变换把直线变成直线，并且保持直线的平行线。（essential！）

仿射变换具有线性性质。

仿射变换保持共线三点的简单比。（essential！）

不共线的三点确定一个仿射变换。

仿射变换决定仿射特征（对称中心、渐进方向、切线、共轭直径与共轭方向）。

仿射变换把相同向量映射成相同向量。（an important appliacation！）

两个不动点决定的直线上所有点都是不动点。

仿射变换的不动点集要么是一个点，要么是一条线，要么是一个平面。

4.4 图形的仿射分类与仿射性质

仿射等价：存在仿射变换 $f(\Gamma)=\Gamma'$；度量等价：存在保距变换 $f(\Gamma)=\Gamma'$。

将几何图形按照仿射等价分为仿射等价类；按照度量等价分为度量等价类。

仿射变换不变的概念叫仿射概念，保距变换不变的概念叫度量概念。

解题经验：利用 $f(\Gamma)=\Gamma$ 并把某点变到顶点，计算量大大简化。

4.5 空间的仿射变换与保距变换简介

变换公式、变换矩阵、变积系数同平面情形。

空间仿射变换一定有特征向量。（三阶实矩阵一定有特征值）

第四章经典好题：

1. 已知 $g \circ f$ 是可逆映射，证明：f 是单射，g 是满射。

解：f 是单射：$\forall f(a)=f(b) \Rightarrow g[f(a)]=g[f(b)] \Rightarrow (gf)(a)=(gf)(b) \Rightarrow a=b$；

g 是满射：$\forall g[f(a)]=(gf)(a)$ 有原象 a。

2. 设平面 π 上的线段 AB 和 CD 长度相等。请构造 π 上的保距变换，它把 A 变成 C，把 B 变成 D。这样的变换有几个？

解：2 个。构造某个以 AB 为边的等边三角形。那么保距变换保证等边三角形变

成等边三角形。容易知道这个变换后的等边三角形在线段 CD 两侧各有一个。所以这样的变换有且仅有 2 个。

3. 设 Γ 是一个椭圆，l 和 l' 是一对共轭直径，试证明存在仿射变换 f，使得 $f(\Gamma)=\Gamma$，但 $f(l)$ 和 $f(l')$ 是两条对称轴。

解：存在仿射变换 f 把共轭直径 l,l' 变到 x,y 轴。由于 f 把 Γ 的方程变为标准形式，我们可以选取适当的单位长使得 $f(\Gamma)=\Gamma$。

4. 在仿射坐标系 I 中，仿射变换 f 把直线 $x+y-1=0$ 变为 $2x+y-2=0$，把直线 $x+2y=0$ 变为 $x+y+1=0$，把点(1,1)变为(2,3)，求 f 在 I 中的变换公式。

解：设 $f:(x,y)\to(x',y')$。$2x'+y'-2=0$ 当且仅当 $x+y-1=0$，$\therefore 2x'+y'-2=s(x+y-1)$。用 $(x',y')=(2,3)$ 与 $(x,y)=(1,1)$ 代入，知 $s=5$。同理，$x'+y'+1=t(x+2y)$，用 $(x',y')=(2,3)$ 与 $(x,y)=(1,1)$ 代入，知 $t=2$。$\therefore 2x'+y'-2=5(x+y-1)$，$x'+y'+1=2(x+2y)$。解得：

$$\begin{cases}x'=3x+y-2\\ y'=-x+3y+1\end{cases}。$$

5. 如果 l 是仿射变换 f 是一条不变直线，试证明：

(1)平行于 l 的向量都是 f 的特征向量，并且特征值 λ 相同；

(2)当 $\lambda\neq1$ 时，l 上有 f 的一个不动点；

(3)如果 f 有不在 l 上的不动点，则存在过此点的一条直线，它上面的每个点都是 f 的不动点。

解：*本题给出的是几何证明。事实上，本题可以通过建立仿射坐标系求解。

(1) $\forall A,B\in l, f(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}=\lambda\overrightarrow{AB}$。由此知道，任意平行于 l 的向量都是 f 的特征向量；由 f 的线性性，知道特征值 λ 都相同。事实上，$\forall C,D,\exists\overrightarrow{CD}=\mu\overrightarrow{AB}$，

$$s.t.f(\overrightarrow{CD})=f(\mu\overrightarrow{AB})=\mu f(\overrightarrow{AB})=\mu\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}.$$

(2) $\forall P\in l$, 由 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\overrightarrow{Pf(P)}}{1-\lambda}$ 决定的点即为 f 的不动点。事实上，

$\overrightarrow{f(P)f(Q)}=f(\overrightarrow{PQ})=\lambda\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{Pf(P)}=\overrightarrow{f(P)Q}$ 知 $f(Q)=Q$。

另外我们可以证明 Q 是唯一的，与 P 的选择无关。因为如果 Q 不唯一，则整条直线都是不动点，这样的话直线方向便是特征值为 1 的特征向量。$\forall M\in l$，

我们有 $\overrightarrow{MQ'}=\dfrac{\overrightarrow{Mf(M)}}{1-\lambda},\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\overrightarrow{Pf(P)}}{1-\lambda}$,

从而 $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{MQ'}=\dfrac{\overrightarrow{Pf(P)}-\overrightarrow{Mf(M)}}{1-\lambda}\Leftrightarrow\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{QQ'}=\dfrac{\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{f(P)f(M)}}{1-\lambda}=\overrightarrow{PM}$,

因此 Q 和 Q' 重合。

(3) $\lambda=1$，任意过不动点且与 l 平行的直线上所有的点都是不动点；

$\lambda\neq1$，知道 l 上必有不动点，两个不动点确定的直线上所有的点都是不动点。

6. 已知仿射变换 f 在仿射坐标系 I 中的变换公式为 $\begin{cases}x'=-2x+3y-1\\ y'=4x-y+3\end{cases}$，仿射坐标系

I'的原点在 I 中的坐标为(4,5)，两个坐标向量在 I 中的坐标分别为(2,3)和(1,2)，求 f 在 I'中的变换公式。

解：先运用公式，求出变换矩阵：$H=B^{-1}AB=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$。再观察个别点的变换：

I 中的(0,0)点被 f 映射成(-1,3)，(4,5)点被 f 映射成(6,14)，(4,5)在 I'中的坐标为(0,0)，(6,14)在 I'中的坐标为(-5,12)，所以 f 在 I'中的变换公式为 $\begin{cases} x'=5x+6y-5 \\ y'=-5x-8y+12 \end{cases}$。

7. 已知仿射变换 f 的变换公式为 $\begin{cases} x'=7x-y+1 \\ y'=4x+2y+4 \end{cases}$。

(1)求 f 的不变直线。
(2)作坐标系，使得两条坐标轴都是不变直线，求 f 在此坐标系中的变换公式。
解：(1)待定系数法易知为 $2x-2y-3=0$ 和 $4x-y=0$。

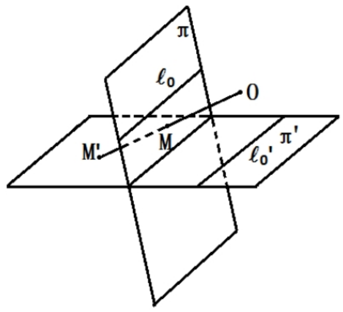
(2) $I' \xrightarrow{B^{-1}} I \xrightarrow{A} f(I) \xrightarrow{B} f(I')$。所以去求满足 $B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 的 λ_1 和 λ_2。

这其实就是矩阵 A 的两个特征值。求出 λ_1、λ_2 = 3 or 6。（$\lambda_1 \neq \lambda_2$，否则$|B|=0$）

所以 f 的变换公式为 $\begin{cases} x'=3x \\ y'=6y \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x'=6x \\ y'=3y \end{cases}$。

第五章 • 射影几何学初步

5.1 中心投影



如右图。π 和 π'是两张相交平面，取定不在 π 和 π'上的一点 O，规定一个对应 τ 如下: 对 π 上的点 M，把它对应到直线 OM 和 π'的交点 M'，我们把 τ 称为以 O 点为中心的 π 到 π'上的**中心投影**。

它有一些性质：

1. l_0 上的点没有象（象是无穷远点）；
2. l_0'上的点没有原象（原象是无穷远点）；
3. 平面 π 上平行于 l_0 的直线被投影成平行于 l_0'的直线；
4. 平面 π 上不平行于 l_0 的平行直线被投影成交点在 l_0'上的相交直线；
5. 平面 π 上相交于 l_0 的相交直线被投影成平行直线；
6. 平面 π'上平行于 l_0'的直线原象是平行于 l_0 的直线；
7. 平面 π'上不平行于 l_0'的平行直线原象是交点在 l_0 上的相交直线；
8. 平面 π'上相交于 l_0'的相交直线原象是平行直线。

5.2 射影平面

中心直线把：所有过 O 点的直线的集合，记做 $\mathscr{B}(O)$；

扩大平面：普通点+无穷远点(直线的线向)，记做 π_+；

射影：$\pi_+\to\mathscr{B}(O)$，$P\to OP$；

截影：$\mathscr{B}(O)\to\pi_+$，$OP\to P$；

中心直线把的线结构: 同一平面内所有过 O 直线的集合，称为 $\mathscr{B}(O)$中的一条线;

点与线的关联关系：点在线上(两点确定一条线)、线在点上(两线确定一个点)；

射影平面的定义：具有线结构的集合；它到一个中心直线把的线结构一一对应。

5.3 交比

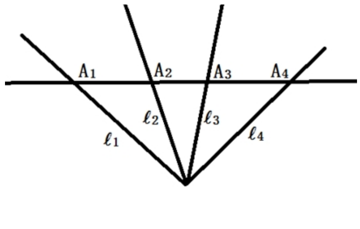
向量交比：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\pi,\begin{cases}\alpha_3=s_1\alpha_1+t_1\alpha_2\\ \alpha_4=s_2\alpha_1+t_2\alpha_2\end{cases}$,定义交比为$(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)=\dfrac{s_2t_1}{s_1t_2}.$

性质：$(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_2,\alpha_1;\alpha_4,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_4,\alpha_3)^{-1}$；

$(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)=1-(\alpha_1,\alpha_3;\alpha_2,\alpha_4)$；$(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_3,\alpha_4;\alpha_1,\alpha_2)$。

交比的大小只与线向有关，而与向量模长无关。

点的交比：$A_1,A_2,A_3,A_4\in\pi$,定义交比为$(A_1,A_2;A_3,A_4)=\dfrac{(A_1,A_2,A_3)}{(A_1,A_2,A_4)}.$



直线交比：用直线的线向类似定义，记作$(l_1,l_2;l_3,l_4)$。

点线交比的协调性：$(l_1,l_2;l_3,l_4)=(A_1,A_2;A_3,A_4)$。

平面交比: $l\in\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3\cap\pi_4$，$\pi$ 与 π_1,π_2,π_3,π_4 分别交于直线 l_1,l_2,l_3,l_4，则$(l_1,l_2;l_3,l_4)$与 π 的选取无关，定义交比为$(\pi_1,\pi_2;\pi_3,\pi_4)=(l_1,l_2;l_3,l_4)$（线面交比的协调性）。

一个直线交比重要性质：$(l_1,l_2;l_3,l_4)=\dfrac{\sin\langle l_1,l_3\rangle}{\sin\langle l_3,l_2\rangle}\bigg/\dfrac{\sin\langle l_1,l_4\rangle}{\sin\langle l_4,l_2\rangle}$。

注：上述平面 π_1,π_2,π_3,π_4 的法向量共面，且法向量的交比等于平面的交比。

扩大平面上的交比：O 是空间中不在 π 上的点，扩大平面 π_+上的共线 4 点 A_1,

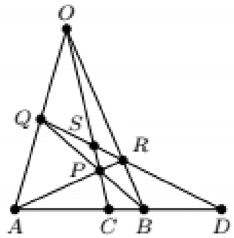
A_2,A_3,A_4的交比定义为直线 OA_1,OA_2,OA_3,OA_4 的交比。交比与点 O 的选择无关。特别地，当 A_1,A_2,A_3 是普通点，A_4 是无穷远点时，$(A_1,A_2;A_3,A_4)=-(A_1,A_2,A_3)$。

中心投影保持交比不变。

$(A_1,A_2;A_3,A_4)=-1$，称 A_1,A_2,A_3,A_4 为调和点列，A_4 称为第四调和点；

$(l_1,l_2;l_3,l_4)=-1$，称 l_1,l_2,l_3,l_4 为调和线束，l_4 称为第四调和线。

右图为已知 A、B、C 三点，求第四调和点 D 的做法。



5.4 射影坐标系

三联比：表示三个不全为 0 的数 x,y,z 之间的比例关系。其中常用〈x,y,z〉表示线的坐标，而用 $\left\langle\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\rangle$ 来表示点的坐标。显然，〈x,y,z〉is equal to〈kx,ky,kz〉。

所有三联比构成的集合记为 RP^2，称为实射影平面。

中心直线把上的射影坐标系：由 l_1,l_2,l_3,l_4 决定的射影坐标系，把 l_1,l_2,l_3,l_4 一起称为它的射影标架，记作$[l_1,l_2,l_3,l_4]$。称 l_1,l_2,l_3,l_4 是该射影坐标系的基本点，l_4 是单位点。则 l_1,l_2,l_3,l_4 的射影坐标依次为 $\left\langle\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\rangle$。

点的坐标是 $\left\langle\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\rangle$，线的坐标是 $\langle a,b,c\rangle$，关联的充要条件是 $ax+by+cz=0$。

三个点的坐标是 $\left\langle\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{matrix}x_3\\y_3\\z_3\end{matrix}\right\rangle$，共线的充要条件是 $\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\y_1 & y_2 & y_3\\z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0$。

三条线的坐标是〈a_1,b_1,c_1〉〈a_2,b_2,c_2〉〈a_3,b_3,c_3〉，共点的充要条件是 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$。

扩大平面上的射影坐标系：射影坐标与$\mathscr{B}$(O)中 O 点位置的选取无关。所以选取扩大平面 π_+上处于一般位置的四点$[A_1,A_2,A_3,A_4]$，这四点与$\mathscr{B}$(O)中的$[l_1,l_2,l_3,l_4]$“点”结构对应，A_1,A_2,A_3,A_4 称为是基本点，A_4 是单位点。

扩大平面上的仿射-射影坐标系：取一个仿射坐标系$[O_0;e_1,e_2]$，取 4 个点：A_1 是 e_1 方向的无穷远点；A_2 是 e_2 方向的无穷远点；O_0 是坐标原点；D 是仿射坐标为(1,1)的点。取不在平面上的点 O，点 P〈$(x,y,z)^T$〉表示 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{OO_0}$。

易知，P 为普通点时，坐标为〈$(x,y,1)^T$〉；P 为无穷远点时，坐标为〈$(x,y,0)^T$〉。

射影坐标的应用：P $\left\langle\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\rangle$，Q $\left\langle\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\rangle$；直线 PQ 坐标：$\left\langle\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\rangle$；

直线 PQ 上点的坐标：$\lambda\left\langle\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\rangle+\mu\left\langle\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\rangle$。

用射影坐标计算交比：看成是仿射坐标系$[O;e_1,e_2,e_3]$中的 4 个向量，作分解计算交比。

特别提醒：建立射影坐标系，必须选取**一般位置（三三不共线）**的 4 点。

对偶原理: 把几何图形中的点换成线，线换成点，得到对偶图形。如果一个命题只涉及点与线的关联关系，那么把命题中的点换成线，线换成点，得到对偶命题。一个命题成立的充要条件是其对偶命题成立。

5. 5 射影坐标变换与射影变换

射影坐标变换：记 J 到 J'的过渡矩阵为 $H_{3\times3}$(H 不唯一，它们相差倍数)，则

点的射影坐标变换公式 $\langle(x,y,z)^{\mathrm{T}}\rangle=\langle H(x',y',z')^{\mathrm{T}}\rangle$

线的射影坐标变换公式 $\langle(a',b',c')\rangle=\langle(a,b,\mathrm{c})H\rangle$

射影映射: 一个射影平面到另一个射影平面的一一对应，并把共线点变为共线点。

射影变换：射影平面到自身的映射。

仿射-射影变换：把普通点变为普通点，无穷远点变为无穷远点。

两个射影平面 P 和 P'上各自取定了射影坐标系 J 和 J'，则存在唯一射影映射 σ：$P\to P'$把 J 变为 J'，即 $\sigma(A_i)=A_i'$。

射影变换：

点变换公式 $\langle(x',y',z')^{\mathrm{T}}\rangle=\langle H(x,y,z)^{\mathrm{T}}\rangle$

线变换公式：$\langle(a,b,c)^{\mathrm{T}}\rangle=\langle(a',b',c')^{\mathrm{T}}H\rangle$

如果 G_1 和 G_2 分别是 σ_1，σ_2 在射影坐标系 J 中的变换矩阵,那么 G_2G_1 是 σ_1 𝕀 σ_2 在 J 中的变换矩阵；

如果 G 是射影变换 σ 在 J 中的变换矩阵，H 为 J 到 J'的过渡矩阵，则 σ 在 J'中的变换矩阵为 $H^{-1}GH$。

5. 6 二次曲线的射影理论

二次齐次方程：$\Gamma:a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$。

(此即 $X^{\mathrm{T}}AX=0$，其中 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$)

在 I 中仿射坐标为(x,y)的点对应射影坐标为$\langle(x,y,1)^{\mathrm{T}}\rangle$的普通点位于 Γ 上，满足 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$。

在 I 中仿射坐标为(x,y)的非零向量对应仿射坐标为$\langle(x,y,0)^{\mathrm{T}}\rangle$的无穷远点位于 Γ 上，满足 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy=0$。这也是 Γ 的渐进方向。

射影等价：存在射影变换 σ，s.t. $\sigma(\Gamma)=\Gamma'$。

Γ_1 和 Γ_2 射影等价的充要条件是矩阵 A_1 和 $\pm A_2$ 合同。

由合同规范型，知非空二次曲线仅有 4 种等价类型：

$x^2+y^2-z^2=0$	圆锥曲线(非退化)	$x^2+y^2=0$	一点
$x^2-y^2=0$	两条直线	$x^2=0$	一条直线

调和共轭：一条圆锥曲线的射影矩阵是 A。称点 x,y 调和共轭，当且仅当它们满足 $X^{\mathrm{T}}AY=0$。

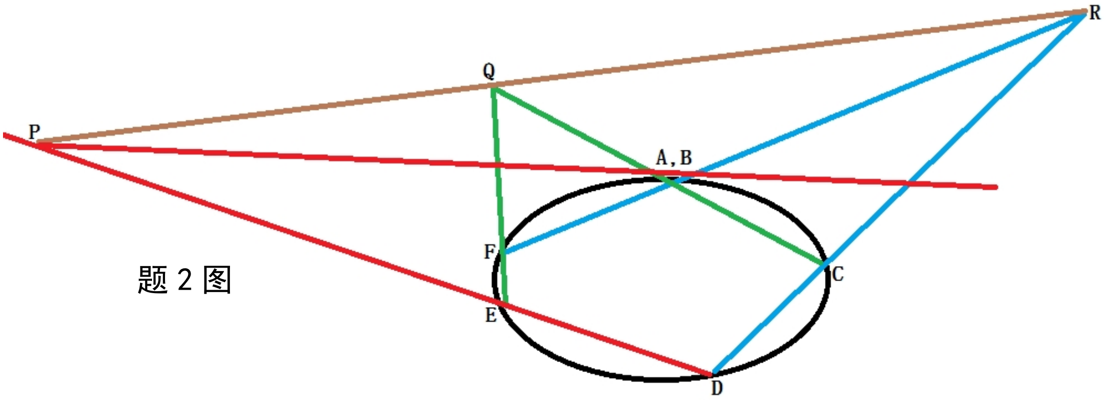
注：1) 当 P、Q 都不在 Γ 上时，如果它们决定的线与 Γ 相交于两点 R、S，则 P、

Q 关于Γ调和共轭的充要条件是 P、Q、R、S 是调和点列。
2) 圆锥曲线Γ上的不同两点一定不调和共轭。
配极：关于某点 P〈$(p_1,p_2,p_3)^T$〉的所有调和共轭点构成一条线〈$(p_1,p_2,p_3)A$〉，称为该点的极线；而关于某线 l〈a,b,c〉的“调和共轭点”〈$[(a,b,c)A^{-1}]^T$〉称为该线的极点。记为 P↔Γ(P)。
特别地，中心型曲线的中心的极线是无穷远线；曲线上点的极线是切线。
配极映射：射影平面上的点集合到线集合的一一对应。
注：1) 点 P 在自己的极线Γ(P)上当且仅当 P∈Γ。
2) 如果 P∈Γ，则Γ(P)与 P 只有一个交点 P。
3) P 在 Q 的极线上的充要条件是 Q 在 P 的极线上。
Steiner 定理: 取定一条圆锥曲线Γ上的四个不同的点 A、B、C、D，则对任意 M∈Γ，有(MA,MB;MC,MD)为定值。(割线退化后为切线)
Pascal 定理: 圆锥曲线的任意内接六边形(割线退化后为切线)三对对边交点共线。

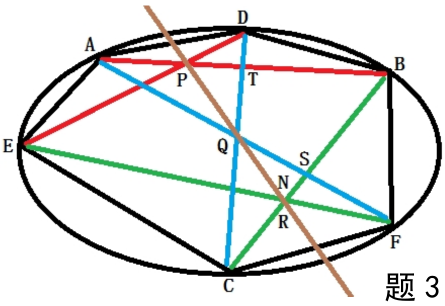
第五章经典好题：

1. 设Γ是平面 π 上的一条中心型二次曲线，O 为中心，A、B 是Γ上的两个点，M 是它们的中点，N 是Γ在 A、B 处的两条切线的交点。证明 O、M、N 共线。
解：记直线 AB 的无穷远点为 T。易知 O 是 T 的调和共轭点。由于(A,B;M,T)=−1，知 M 和 T 也是一对调和共轭点。所以直线 OM 是点 T 的极线。又∵N、A 调和共轭，N、B 调和共轭，∴AB 是 N 的极线，∴N、T 是调和共轭点。∴T 的极线过 N，即 O、M、N 三点共线。
2. 点 M 在圆锥曲线Γ上，用直尺做出Γ在 M 处的切线。
解：利用退化六边形(五边形)的 Pascal 定理即可。
3. 证明一般情形的 Pascal 定理。
解：设 BC,EF 与 l_{PQ} 交于 N,R 点。交比(C,B;N,S)=(QC,QB;QN,QS)=(T,B;P,A)=(DT,DB;DP,DA)=(DC,DB;DE,DA)=(Steiner 定理)=(FC,FB;FE,FA)=(FC,FB;FR,FS)=(C,B;R,S)。∴N、R 重合。故 P、Q、R 三点共线。
4. 用交比法证明三角形的 Pascal 定理。
解：往证 QP 和 QR 均是直线 QT,QA,QN 的第四调和线。交比(QT,QN;QA,QP)=(T,N;A,P)=(CT,CK;CA,CB)=(Steiner 定理)=(BC,BK;BA,BN)=(C,K;S,N)=−1。同理可证(QT,QN;QA,QP)=−1.∴QP 和 QR 是上述三线的第四调和线，P,Q,R 共线。
5. 设Γ是平面 π 上的一条圆锥曲线，A,B,C,D 是Γ上的 4 个点，使得 AB 平行于 CD。记 M,N 分别是线段 AB,CD 的中点。又设Γ在 A,B 处的切线相交于 P，Γ在 C,D 处的切线相交于 Q，直线 AC,BD 相交于 S，直线 AD,BC 相交于 T，证明: P,Q,S,T 都和 M,N 共线。
解：设 AB,CD 交于无穷远点 O，往证 M,N,P,Q,S,T 都在 O 点的极线上。
显然有(O,M;A,B)=(O,N;C,D)=−1，故 M,N 在 O 点的极线上；
点 P 的极线是 AB，点 Q 的极线是 CD，所以 P,O 和 Q,O 均是一对调和共轭点，所以 P,Q 在 O 点的极线上；
过 S 作 SO∥AB∥CD，则(O,S;E,F)=(AB,AS;AE,AF)=(AB,AC;AE,AF)=(Steiner 定理)=(DB,DC;DE,DF)=(S,O;E,F)，∴(O,S;E,F)=−1，即 O,S 是一对调和共轭点；
在 AD、BC 上取点 I,J 使得 T,I 和 T,J 调和共轭。利用 AB∥CD 易证 AI/ID=BJ/JC。进而有 IJ∥AB∥CD，∴直线 IJ 是点 T 的极线，且 O∈IJ。
综上所述，点 O 的极线横穿六点 M,N;P,Q;S,T。即上述六点共线。

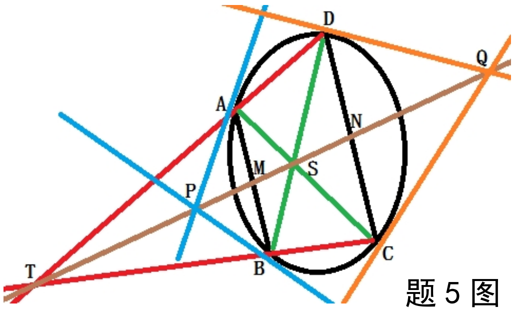
试题图片



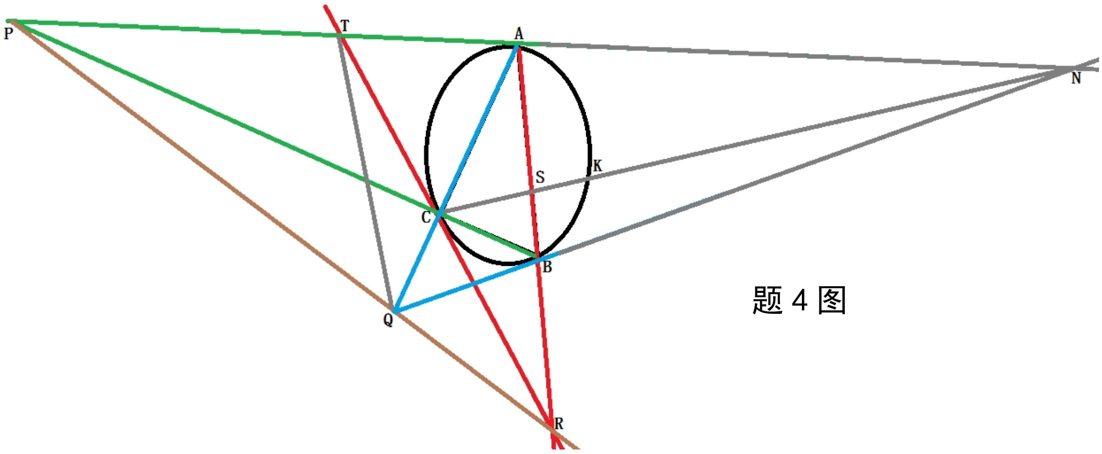
题 2 图



题 3 图



题 5 图



题 4 图