数学模型

主讲人：周珍楠
打字人：龚诚欣

1 前言

• 变化率模型

给定初始状态，状态变量（随时间）变化；

自变量：时间

模型：状态变量关于时间的变化速率

令 $\mathbf{x(t)}=(x_1(t),\cdots,x_n(t))\in R^n$ 为状态变量，则 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$，$\mathbf{x(0)}=\mathbf{x_0}$，$\mathbf{f}=(f_1,\cdots,f_n)$称为变化率函数

• 守恒律模型

偏微分方程模型

自变量：时间 t，空间 **x** 或其他

状态变量：多元函数

考虑密度函数 u(x,t)，R×R→R，在时间 t 时，位于 X_1,X_2 两点之间的质量

m=$\int_{x_1}^{x_2}u(x,t)dx$；若忽略运动，可提出变化率模型：$\frac{dm}{dt}=f(m,t)$

考虑水流，假设这段质量 m(t)随时间变化的原因：

1° 在边界点 x_1,x_2 的通量 J；2° 在区间$[x_1,x_2]$内的源ψ；

从 $\frac{d}{dt}m(t)=J|_{x_1}-J|_{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\Psi dx$ 可以推出 $\int_{x_1}^{x_2}(u_t+J_x-\Psi)dt=0$。进而有

1° 平衡律：$u_t+\nabla\cdot J-\psi=0$；

2° 守恒律：$u_t+\nabla\cdot J=0$。

高维空间考虑 u(**x**,t)为质量密度，通量 **J**=u**v**，则 $u_t+\nabla\cdot(u\mathbf{v})=0$

• 哈密顿力学和相空间密度

正则坐标：**r**(t)=(**q**(t),**p**(t))，**q**(t)表示位置，**p**(t)表示动量。

哈密顿力学方程：$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$，$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}$，H(**q**,**p**)是哈密顿量。

考虑经典力学系统 H=T+V，动能 T=$\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m}$，势能 V=V(**q**)；

成立：$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}$，$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\nabla V(\boldsymbol{q}):=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q})$

称 **r**=(**q**,**p**)∈R^{2d} 所处空间为相空间，考虑密度函数 f(**q**,**p**,t)。在时间 t 时，**q**∈S_1，**p**∈S_2 内所有粒子总质量，则 $m(t)=\int_{S_1}\int_{S_2}f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$

考虑守恒律方程：$f_t+\nabla\cdot(f\cdot\boldsymbol{r}')=0$，可以推导出：

刘维尔方程：$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q})=0$。对于一般的哈密顿量，刘维尔方程仍然成立。

2 变化率模型和稳定性的应用分析

考虑变化率模型 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(\boldsymbol{x},t)$， $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$。若 $\boldsymbol{f}$ 不显含时间 t，则得自治系统：$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(\boldsymbol{x})$， $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$。本章只考虑自治系统。

• 化学反应中的动力学模型

质量作用定律：对于反应物与生成物；reactants→k→products，生成物产生率和反应物浓度和反应常数 k 有关。

用 A(t)表示 A 的浓度，则有：

$\frac{d}{dt}A(t)=\sum_n(creation\ rate)_n-\sum_m(consumption\ rate)_m$，且变化率由物质浓度的多项式给出。

注：只适用于基元反应（只经过一个暂态的反应）

1. Constant supply. A 被以恒定速率加入系统，(source)→k→A，dA/dt=k，称为零阶反应，即是 $k=k[A]^0$。（不是化学反应）

2. Decay. A 以恒定速率被消耗，A→k→(waste)，dA/dt=−kA，$A(t)=A(0)e^{-kt}$，称为一阶反应。

3. Transformation. 1 个 A 分子转化成 1 个 B 分子，A→k→B，dA/dt=−kA，dB/dt =+kA。

4. Reversible transformation. 1 个 A 分子和 1 个 B 分子相互转化，可分成正向、逆向反应：A→k_1→B，B→k_2→A，$dA/dt=-k_1A+k_2B$，$dB/dt=k_1A-k_2B$。

5. Compound formation. 1 个 A 分子和 1 个 B 分子转化成一个 C 分子，A+B→k→C，dA/dt=−kAB，dB/dt=−kAB，dC/dt=kAB

注：反应率正比反应物浓度乘积，基于相互独立分子碰撞的概率表述

注意下面这个特殊情况。若 A 与 B 相同，即 2 个 A 分子转化成 1 个 C 分子，A +A=2A→k→C，若 $dC/dt=kA^2$，则 $dA/dt=-kA^2$ 是错的！（重复计算）

6. Multiple products. m 个 A 分子与 n 个 B 分子生成 p 个 C 分子与 q 个 D 分子，mA+nB→k→pC+qD，为避免重复计算，定义：

reaction rate=−rate of consuming one unit of reactant = + rate of creating one unit of product.

于是 rate=$-\frac{1}{m}\frac{dA}{dt}=-\frac{1}{n}\frac{dB}{dt}=\frac{1}{p}\frac{dC}{dt}=\frac{1}{q}\frac{dD}{dt}$

又由相互独立分子碰撞假设，rate=kA^mB^n

回到 case 5，我们知道 $dA/dt=-2kA^2$，$dC/dt=kA^2$，因此 d(A+2C)/dt=0。

米氏酶动力学简介：

非基本化学反应，无法用质量作用定律

mA+nB→(???)→⋯→pC+qD；

考虑酶促化反应：底物 S，最终产物 P，酶 E，中间产物 C，即是

$S+E\underset{k_2}{\overset{k_1}{\leftrightarrow}}C\overset{k_3}{\rightarrow}P+E$，S+E→$k_1$→C，C→$k_2$→S+E，C→$k_3$→P+E

$dP/dt=+k_3C$，$dC/dt=k_1SE-k_2C-k_3C$，$dE/dt=-k_1SE+k_2C+k_3C$，$dS/dt=-k_1SE+k_2C$
设初值 S=S(0)，E=E(0)，C(0)=0，P(0)=0，注意到 d(C+E)/dt=0，则 E(t)=E(0)−C(t)。这就将 4 维动力系统转化为 3 维动力系统。

• 稳定性理论简介

种群生长的 logistic 模型和一维系统的稳定性简介：

考虑方程 $\frac{dx}{dt}=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)$，x 是种群数量，r 是固有增长率，N 是最大容纳量

1° 当 x(0)=0 或 N 时，x(t)≡x(0)；
2° 0 附近的轨道 x(t)远离 0，N 附近的轨道 x(t)靠近 N。

引入定义：对于自治系统 $\frac{dx}{dt}=f(x)$ (*)：
1° f(x)=0 的根 $x=x_0$ 称为方程的平衡解；
2° 若存在 x_0 的邻域使得若 x(0)在此邻域内则 $\lim_{t\to+\infty}x(t)=x(0)$，则称平衡点是（渐近）稳定的；否则称为不稳定的。
对于一维系统，在平衡点附近做 Taylor 展开，有 $x'(t)=f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$。忽略 Peano 余项，对于近似线性方程 $x'(t)=f'(x_0)(x-x_0)$ (**)，我们有：
1° 若 $f(x_0)<0$，则 x_0 对于(*)和(**)是稳定的；
2° 若 $f(x_0)>0$，则 x_0 对于(*)和(**)是不稳定的；
3° 若 $f(x_0)=0$，则 x 是退化的平衡点，需看第一个非 0 的高阶导数。
在很多问题中，系统的解依赖于一个参数。平衡点的个数和性质随着参数的变化发生了改变，这种解的结构的定性改变叫做分岔。

• 相互竞争模型和二维系统的稳定性简介

$x_1'(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$，$x_2'(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$，$\sigma_1,\sigma_2$ 是相对阻滞系数。

我们考虑 t→+∞，$x_1(t)$和 $x_2(t)$如何变化？令 $x_1'(t)=x_2'(t)=0$，得到四个平衡解：

$(N_1,0)$，$(0,N_2)$，(0,0)，$\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$。考虑最后一个解，知 σ_1,σ_2 同时 >1 或<1 时，P_4 在第一象限。

• 二维常微分方程稳定性理论

设 $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$，$d\mathbf{x}/dt=(f(x_1,x_2),g(x_1,x_2))$ (*)，令 $P_0=(x_1^0,x_2^0)$为平衡点。在 P_0 点做 Taylor 展开，得到近似线性方程 $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1-x_1^0\\x_2-x_2^0\end{pmatrix}$ (**)，A 是 Jacobi 矩阵。

设 $p=-(f_{x_1}+g_{x_2})|_{P_0}$，q=det(A)=|A|，则有结论：

1° 若 A 特征值实部≠0，则 P 对(*)和(**)的稳定性相同；a) p>0 且 q>0，则 P_0 稳定；b) p<0 或 q<0，则 P_0 不稳定；
2° 临界情况：(*)和(**)稳定性不同（p>0, q = 0）

• 种群的相互依存模型

$$\frac{dx_1}{dt}=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right);\quad \frac{dx_2}{dt}=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

系统的平衡点是 $P_1(N_1,0)$，$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$，$P_3(0,0)$。

只有 P_2 和两个种群的相互依存有关。P_2 有实际意义且稳定的条件是 $\sigma_1<1,\sigma_2>1$, $\sigma_1\sigma_2<1$。

• 食饵-捕食者模型

$\frac{dx}{dt}=rx-axy,\frac{dy}{dt}=-dy+bxy$，平衡点是 $P_1=(d/b，r/a)$，$P_2=(0,0)$

令 $f(x)=x^de^{-bx},g(y)=y^re^{-ay}$，求出极值点 $x_0=d/b$，$y_0=r/a$，恰好是平衡点。

解 ode 方程，知通解为 $x^de^{-bx}y^re^{-ay}=c$。当 $c=f(x_0)g(y_0)$时，相轨线退化为平衡点 P_1；当 c 减小时，相轨线是一族从 P_1 向外扩张的封闭曲线（P_1 是中心）。实际上，$\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{d}{b}$，$\bar{y}=\frac{r}{a}$。

3 微分方程模型选讲：输运/运输/运动

只考虑时空区域，系统性质随时间变化

连续性假设：微观的平均~宏观的局部

• Eulerian 描述和 Lagrangian 描述

引例：被动运输

1. 单个粒子按外加的速度场运动；2. 自己的存在并不影响速度场

A. 欧拉描述：在固定的坐标系下表示 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，$d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$。

B. 拉格朗日描述：给定一个粒子的运动，将其他状态变量描述成时间的函数。

关联：$\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t),t)$。

一般地，跟粒子运动 $\boldsymbol{x}(t)$相关的状态变量也有其欧拉描述 $f(\boldsymbol{x},t)$和拉格朗日描述 $F(t,\boldsymbol{X}_0)$。

考虑物质滴，目标：已知 $d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，推导 $f(\boldsymbol{x},t)$的模型。考虑一维情形。

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}f(x,t)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx+f(b,t)\frac{db}{dt}-f(a,t)\frac{da}{dt}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx+f(x,t)v(x,t)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)v(x,t)dx$$ （Reynolds Transport Theorem）

由物质滴的任意性立即得到守恒律方程。

• 欧拉方程*

是一种特殊的守恒律方程。

守恒律：$\boldsymbol{u}_t+\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{J}=0$，取$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\rho\\ j\\ E\end{pmatrix},\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{j}^T\\ \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}^T+p\boldsymbol{I}\\ (E+p)\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{j}^T\end{pmatrix}$得欧拉方程。

自变量是 $t\in\mathrm{R},\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^d$，其余都是状态变量。

其中$\rho\in\mathrm{R}$ 是密度，$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ 是动量，p 是压强，E 是能量密度。

简化：流体不可压缩，即是$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，则方程转为$\begin{cases}\rho_t+v\cdot\nabla\rho=0\\ v_t+v\cdot\nabla v=-\dfrac{\nabla p}{\rho}\\ \nabla\cdot v=0\end{cases}$。进一步简化，

设ρ不随时间空间发生变化，得到$\begin{cases}v_t+v\cdot\nabla v=-\dfrac{\nabla p}{\rho_0}+\mu\Delta v\\ \nabla\cdot v=0\end{cases}$，其中 $\mu\Delta v$ 是粘性项，μ是粘性系数。

• 一阶双曲方程的特征线法

半线性一阶波方程：$\dfrac{\partial}{\partial t}p+c(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x}p=r(x,t,p)$,$p(0,x)=f(x)$，其中 $c(x,t)$是速度，$r(x,t,p)$是变化率函数。这是欧拉描述，可以转化为拉格朗日描述：

$\dfrac{dX}{dt}=c(X(t),t)$,$X(0)=X_0$，$\dfrac{dP}{dt}=p_t+p_x\dfrac{dx}{dt}=p_t+p_xc=r(t,X,P)$,$P(0,X_0)=f(X_0)$。这个方程的轨线初值问题定义了(x,t)平面的一条曲线，这样的曲线被称为特征线，可以看作是一种广义的轨线。解出拉格朗日描述后代回即得欧拉描述。

拟线性一阶波方程：$\dfrac{\partial}{\partial t}p+c(x,t,p)\dfrac{\partial}{\partial x}p=r(x,t,p)$,$p(0,x)=f(x)$，转化为拉格朗日描述：$\dfrac{dX}{dt}=c(X(t),t,P(t))$，$\dfrac{dP}{dt}=r(t,X(t),P(t))$。一般无法依次求解，特征线可能相交。

特例：Burgers' equation：$P_t+PP_x=0$。引入特征线：$\dfrac{dX}{dt}=P(t),\dfrac{dP}{dt}=0$。注意到特征线在 t>1 时相交，引入激波解（有时是物理解、单值解、积分意义下满足守恒律）。利用 p 的守恒律有 $p_t+\left(q(p)\right)_x=0$，其中 $q(p)$是 p 的通量函数。

在[a,b]上对 x 积分有 $\dfrac{d}{dt}\left(\int_a^b pdx\right)+q(p)\Big|_{x=a}^{x=b}=0$。我们希望引入激波解 $x_s(t)$将两个解分开，即是$\left[\dfrac{d}{dt}\left(\int_a^{x_s}p_-dx\right)-q(p_-(a,t))\right]+\left[\dfrac{d}{dt}\left(\int_{x_s}^b p_+dx\right)+q(p_+(b,t))\right]=0$。

进一步变换得到

$$\left(\int_a^{x_s}\partial_t p_- dx+q(p_-(x_s,t))-q(p_-(a,t))\right)+\left(\int_{x_s}^b\partial_t p_+ dx+q(p_-(b,t))-q(p_-(x_s,t))\right)$$

$$-q(p_-(x_s,t))+q(p_+(x_s,t))+[p_-(x_s,t)-p_+(x_s,t)]\frac{dx_s}{dt}=0\text{。}$$

前面由于守恒律是 0，这就得出了激波解 $\frac{dx_s}{dt}=\frac{q(p_+(x_s,t))-q(p_-(x_s,t))}{p_+(x_s,t)-p_-(x_s,t)}$。

• 反应扩散方程的行波解

考虑一维反应扩散方程 $\rho_t-\rho_{xx}=f(\rho)$，其中ρ是密度，$f(\rho)$表示反应率函数，$f(0)=f(1)=0$。我们希望解出 $\rho(x,t)=v(x-ct)$，c∈R, $v(-\infty)=1$, $v(+\infty)=0$。

代入知 $-cv'-v''=f(v)$。考虑点燃温度模型 $f(\rho)=\begin{cases}0, & 0\le\rho<\theta\\ \mu(1-\rho), & \theta<\rho\le 1\end{cases}$，并且希望 $v(0)=\theta$（为了唯一解而选取的可解性条件），得到解 $v(x)=1-(1-\theta)e^{\lambda_+ x}, x<0$，其中 $\lambda_+=\frac{1}{2}(-c+\sqrt{c^2+4\mu})$； $v(x)=\theta e^{-cx}, x>0$。利用 v'在 x=0 处连续可解出 c。

4 变分原理与优化简介

• 微积分中的极值问题和泛函

泛函：把函数映成标量的映射。本章只考虑形如一个函数及其导数的定积分 J(y) $=\int_a^b L(x,y,y',\cdots)dx$。把 L 称为拉格朗日量。考虑目标泛函的极小化问题。

• 波动现象

哈密顿变分原理：考虑力学系统，自变量 t，状态变量 $q,v\in R^s$，设动能为 T(t,q,v)，势能为 V(t,q)。质点在 t_1 时刻始于 q_1，在 t_2 时刻始于 q_2。拉格朗日量为 L=T−V，则运动轨迹取作用量积分 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,v)dt$ 的极值。

泛函导数：考虑一个元素为函数ρ:R→R^{s}的空间 M，J 为定义在 M 上的泛函，J:M→R，J 的方向导数如下定义：∀可容许$h(x)$, $\int_a^b\frac{\delta J}{\delta\rho}(x)\cdot h(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(\rho+\varepsilon h)-J(\rho)}{\varepsilon}$

$=\frac{d}{d\varepsilon}J(\rho+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$。回到 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q(t),q'(t))dt$，扰动满足 $h(t_1)=h(t_2)=0$ 且光滑。

则 $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\delta S}{\delta q}\cdot hdt=\frac{d}{d\varepsilon}S(q+\varepsilon h)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\cdot h+\frac{\partial L}{\partial q'}\cdot h'dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'}\right)\right)\cdot hdt$。因此，

$\frac{\delta S}{\delta q}=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'}\right)$。由最小作用量原理得 Euler-Lagrange：$\frac{\delta S}{\delta q}=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'}\right)=0$。

推广：$\frac{\partial L}{\partial q}-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{x_j}}\right)=0$。

绳索的微小振动：$u(x,t)$是偏移平衡位置的量。模型假设：振动过程满足最小作用量原理，且$(t,x)\in[0,T]\times[a,b]$；2° ρ(x)线密度，动能$\frac{1}{2}\rho u_t^2$；3° 形变$ds-dx=\frac{1}{2}u_x^2dx$，势能$V=\frac{1}{2}\mu u_x^2$。欧拉方程：$\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)$，进而得到一阶波方程$\rho(x)u_{tt}=\mu u_{xx}$。

推广：若有外力，得到受迫振动方程：$\rho(x)u_{tt}=\mu u_{xx}+f(x,t)$。

微小膜振动，$u(t,x,y)$，则得到$\rho(x,y)u_{tt}=\mu(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)$。

极小曲面问题：考虑边界固定的膜$(x,y,u(x,y))$，膜表面积 A=$\iint_V\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy$，极小曲面：A 达到极值，拉格朗日量 L=$\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$，化简弃高阶项得到 $u_{xx}+u_{yy}=0$，$u(x,y)=g(x,y)$在边界上（laplace 方程）。

- 边界条件的影响：自然边界条件

回顾最小作用量原理$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,v)dt$，边界作用：1° 对 E-L 方程给出边界作用；2° 给出扰动 h 的边界条件；3° 求变分中边界项消失。称为第一类边界条件。

有一个变化边界的问题：(0,0)到 $y=f(x)$的最佳路径问题，弧长$\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$，引入扰动 $y_0=y+\varepsilon h$，$b_0=b+\varepsilon c$，其中 $h(0)=0$，扰动后泛函 J=$\int_0^{b+\varepsilon}\sqrt{1+(y'+\varepsilon h')^2}\,dx$，计算得到自然边界条件$y'(b)=-\frac{1}{f'(b)}$。总结来看，最优解满足$-\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)'=0, y(0)=1$

$y(b)=f(b)$，$y'(b)=-\frac{1}{f'(b)}$。

- 带约束的优化问题

等周问题：给定解的积分条件；
完整系统：给定解逐点满足的条件；
优化控制：给定解逐点满足的微分方程。

等周问题：$\max_y J=\int_a^b L(x,y,y')dx, s.t. G=\int_a^b g(x,y,y')dx=0$，增广目标 I=J−λG。

增广的拉格朗日函数：$L_0=L-\lambda g$，则 I=$\int_a^b L_0(x,y,y')dx$。引入扰动，假设由边界条件变分中边界消失，得到带约束的 E-L 方程$\frac{\partial L_0}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L_0}{\partial y'}\right)=0$。

微分方程约束：优化控制

希望最小化泛函 $J=\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt$ 使得 x,t 满足 $\frac{dx}{dt}=f(t,x,u)$

初值条件 $x(0)=x_0$，终止条件 $x(T)=x_1$，T 自由。其中 x 状态函数，u 控制函数。

寻找控制函数 $u(t)$使得 1° 目标可达：$x(t)$能在某时 T 达到 x_1；2° 在所有可行控制中，对应花费 J 最小。待求：$u(t)$，$x(t)$，T。

引入含时的拉格朗日乘子$\lambda(t)$，增广的拉格朗日函数 $L_1=L-\lambda(t)[x'(t)-f]$，增广泛函 $I=\int_0^T L_1(x,u,x',\lambda)dt$。引入扰动：

$\tilde{x}(t)=x^*(t)+\varepsilon h(t)$，$\tilde{u}(t)=u^*(t)+\varepsilon v(t)$，$\tilde{\lambda}(t)=\lambda^*(t)+\varepsilon\gamma(t)$，$\tilde{T}=T^*+\varepsilon S$。

变分，得到 $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{I}-I}{\varepsilon}=\int_0^T[\frac{\partial L_1}{\partial x}h+\frac{\partial L_1}{\partial x_1}h'+\frac{\partial L_1}{\partial u}v+\frac{\partial L}{\partial\lambda}\gamma]dt+L_1|_{t=T^*}S$

$=\int_0^T[\{\frac{\partial L_1}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x'}\right)\}h+\frac{\partial L_1}{\partial u}v+\frac{\partial L}{\partial\lambda}\gamma]dt+\left(L_1S+\frac{\partial L_1}{\partial x}h\right)|_{t=T^*}$

对终止条件 $x^*(T^*+\varepsilon S)+\varepsilon h(T^*+\varepsilon S)=x_1$ 做泰勒展开，代入变分的边界项，得到

$\left(L_1-x'\frac{\partial L}{\partial x'}\right)|_{t=T^*}S$。定义哈密顿量 $H=L_1-x\frac{\partial L_1}{\partial x'}=L+\lambda f$，由扰动任意，得到

$\frac{\partial L_1}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x'}\right)=0,\frac{\partial L_1}{\partial u}=0,\frac{\partial L_1}{\partial\lambda}=0,H(T^*)=0$。其中(3)是状态方程，(1)是协态方程可改写为 $\frac{\partial L}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{d\lambda}{dt}=0$，(2)可看成几何约束 $\frac{\partial L}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f}{\partial u}=0$。

5 边值问题及其应用

• 初值问题和边值问题

边值条件：在自变量定义域边界给出

边值问题：微分方程+边值条件

本章只考虑一维二阶方程的边值问题。

考虑边值问题：f''+λf=0，f(0)=0，f(L)=0。当λ≤0 时，只有平凡解。λ>0 时，通解为 $f=c_1\sin(\sqrt{\lambda_1}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda_2}x)$，根据边界条件，知 $c_2=0$，$c_1\sin(\sqrt{\lambda}L)=0$，

记 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$，相应地 $f_n=c_1\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$。

边值条件的分类：第一类 Dirichlet：f=c；第二类 NeumannL：f'=c；第三类 Robin：gf'+hf=c；周期：f(a)=f(b),f'(a)=f'(b)。前三类 c=0 时称为齐次条件。

• 初边值问题

热传导问题：u 一维杆的温度，k 导热系数，u 满足 $u_t=ku_{xx}$，初值条件 $u(x,0)=u_0(x)$，边值条件：在 x=0,L 给出 t>0。一些具体边值条件：给定温度：$u(0,t)=u_B(t)$；绝热条件：$-ku_x(0,t)=f(t)$；牛顿冷却定律：散热速率正比于温度差，$-ku_x(0,t)=-H[u(0,t)$

$-u_B(t)$]，H 是传热系数。
弹性波动问题：$u_{tt}=c^2u_{xx}$，I.C.:$u(x,0)=f(x)$，$u_t(x,0)=g(x)$；B.C.$u(0,t)=0$，$u(L,t)=0$。
考虑一种特殊的解：$u(x,t)=m(x)k(t)$，得到 $m_{xx}+\lambda m=0$，$m(0)=m(L)=0$。

- Sturm-Liouville Problems

S-L 方程：$Lf+\lambda\sigma f=0$，其中 $Lf=\frac{d}{dx}(p\frac{df}{dx})+qf$。
S-L 特征值问题：$Lf+\lambda\sigma f=0$，B.C.：$\beta_1 f(a)+\beta_2 f'(a)=0$，$\beta_3 f(b)+\beta_4 f'(b)=0$，其中$\beta_i\in R$，$q,p,\sigma\in C[a,b]$，且 $p,\sigma>0$。
若存在非平凡解，对应的λ称为特征值，对应的非平凡解称为特征函数。本章只考虑 $f_n(x)\in R$。
性质：1° 特征值都是实数，2° $\lambda_1<\lambda_2<\cdots\cdots<\lambda_n<\cdots\cdots$；3° f_n 完备；4° 属于不同特征值的特征函数关于权函数σ正交，即是$\int_a^b f_n f_m\sigma dx=0$，于是可以求出 c_n。
特征函数展开法：$Lu=f$，$u(a)=u(b)=0$，求 $u(x)$。考虑 Regular S-L 特征值问题 $Lf_n+\lambda_n\sigma f_n=0$，$f_n(a)=f_n(b)=0$。假设已求解$\lambda_n, f_n$，令 $u(x)=\Sigma_n c_n f_n(x)$。LHS=$L\Sigma_n c_n f_n(x)=\Sigma_n c_n Lf_n(x)=-\Sigma_n c_n\lambda_n\sigma f_n$。再利用$\sigma$正交性即可。
注意，这里解可以写成$u(x)=\int_a^b f(x_0)G(x,x_0)dx_0$，其中

$$G(x,x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(x_0)}{-\lambda_n\int_a^b\phi_n^2(x')\sigma(x')dx'}$$ 称为 Green 函数。

- 格林函数和弗雷德霍姆二选一

将区间[a,b]以 Δx 剖分为 N 份，剖分格点为 x_i，则

$f(x)\approx\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\chi_{x_i\Delta x}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\frac{\chi_{x_i\Delta x}(x)}{\Delta x}\Delta x$。形式定义$\delta(x-x_i)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x}$且

$f(x)=\int_R f(x')\delta(x-x')dx'$。

性质：1° $\int_R\delta(x-x')dx'=1$；2° $\delta(c(x-x_0))=\frac{1}{|c|}\delta(x-x_0)$；3° Heaviside Step

$H(x-x')=\begin{cases}0, x<x'\\1, x>x'\end{cases}$是$\delta$的原函数。

回顾 Lu=f 的解$u(x)=\int_a^b f(x_0)G(x,x_0)dx_0$，令$f(x_0)=\delta(x_0-x_s)$，那么

$u(x)=\int_a^b\delta(x_0-x_s)G(x,x_0)dx_0=G(x,x_s)$，从而满足$LG(x,x_s)=\delta(x-x_s)$。

格林公式：$Lu=\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu$，则$\int_a^b uLv-vLudx=p(uv'-u'v)|_a^b$。

引理：若 u,v 满足齐次 B.C.，则$\int_a^b uLv-vLudx=0$。

取 v(x)=G(x,x')，u(x)是 BVP 的解，则 $\int_a^b u(x)\delta(x-x')-G(x,x')f(x)dx=0$，得到 $u(x')=\int_a^b f(x)G(x',x)dx$。

回到特征函数展开法，得到 $-a_n\lambda_n=\dfrac{\int_a^b f\phi_n dx}{\int_a^b \phi_n^2\sigma dx}$。若某个 $\lambda_n=0$：

case 1：$\int_a^b f\phi_n \neq 0$，则 BVP 无解；case 2：$\int_a^b f\phi_n=0$，则 BVP 无穷多解。

注：存在λ_n=0，即 LΦ=0 有非平凡解；

a：BVP：Lu=f+齐次 B.C.；b：齐次特征问题：LΦ=0+齐次 B.C.；

1° 若 b 只有平凡解，则 a 有唯一解；

2° 若 b 有非平凡解，则回到上面两个 case。

6 代数方程模型和差分方程模型

- 量纲分析

研究力学问题，将长度 l，质量 m，时间 t 作为基本量纲，记以大写字母 L,M,T。物理量 q 的量纲记为$[q]$。

数学公式表示物理量之间的关系，等式两边量纲应相同。

白金汉π定理：设 m 个有量纲的物理量 $q_1,\cdots,q_m$ 之间存在物理定律 $f(q_1,\cdots,q_m)=0$，取 $q_1^{y_1}\cdots q_m^{y_m}=\lambda$。基本量纲 $X_1,\cdots,X_n$，不妨设 $n\leqslant m$，设 $q_1,\cdots,q_m$ 的量纲$[q_j]=\prod_{i=1}^{n}X_i^{a_{ij}}$，矩阵 A=$(a_{ij})_{n\times m}$ 称为量纲矩阵，Ay=0。设 A 的秩 rankA=r，则 Ay=0 有 $m-r$ 个基本解，记为 $\boldsymbol{y}^{(s)}$，则存在 $m-r$ 个相互独立的无量纲量 $\pi_s=\prod_{j=1}^{m}q_j^{y_j^{(s)}}$，且理论上存在 $F(\pi_1,\cdots,\pi_{m-r})=0$。（无量纲化、无量纲参数不唯一、隐函数存在定理常应用）

- 无量纲化

考虑抛射问题：$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{r^2g}{(x+r)^2}\\ x(0)=0,\dot{x}(0)=v\end{cases}$，目标：无量纲化，降低参数个数。

相同量纲的参数组合：x_c,t_c，新变量 $\bar{x}=\dfrac{x}{x_c},\bar{t}=\dfrac{t}{t_c}$ 是无量纲的。

构造 1：$x_c=r,t_c=r/v$，则 $\begin{cases}\varepsilon\bar{x}''=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}\\ \bar{x}(0)=0,\bar{x}'(0)=1\end{cases},\varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}$，解 $\bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$ 只含一个独立参数。

构造 2：$x_c=v^2g^{-1}, t_c=vg^{-1}$，则 $\begin{cases} \bar{x}''=-\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2} \\ \bar{x}(0)=0, \bar{x}'(0)=1 \end{cases}, \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}$。

若ε很小，我们发现构造 1 不能省去ε，而构造 2 可以省去ε。

无量纲参数反映了各种物理效果的相对重要性。

7 微扰法和渐进分析简介

• 渐近展开

定义在$\varepsilon\to0$ 时：1° $\lim f(\varepsilon)/g(\varepsilon)=1$，记作$\varepsilon\to0$，$f\sim g$；2° $f=O(g)$：存在 $A>0$，当ε充分小时，$|f|<A|g|$；3° $f=o(g)$，$\lim f(\varepsilon)/g(\varepsilon)=0$。

考虑函数 $x(t,\varepsilon)$，有分离变量类型的级数展开 $x(t,\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0(t)+\delta_1(\varepsilon)x_1(t)+\cdots$，且 $x_n(t)=O(1)$（t 在一定范围内），度规函数满足$\delta_0(\varepsilon)>>\delta_1(\varepsilon)>>\cdots$，称为渐近展开的基本形式。渐近展开中的级数有可能是发散的，但是在$\varepsilon<<1$ 时，其部分和仍然可能提供了很精确的近似。

• 渐近展开的计算

代数方程 $F(x,\varepsilon)=0$，$\varepsilon<<1$，AE 的基本形式：$x(\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0+\delta_1(\varepsilon)x_1+\cdots$。

非奇异：$\lim_{\varepsilon\to0}x=x_0$，若 $x_0\neq0$，则$\delta_0=1$；

Vanishing solution：$\lim_{\varepsilon\to0}x=0$，约定$\delta_0<<1$；

奇异解：$\lim_{\varepsilon\to0}|x|=\infty$，约定 x_0 有限，$\delta_0>>1$。

考虑方程 $x^2-x+\varepsilon/4=0$，观察：1° 令$\varepsilon=0$，得到 $x=0,1$；2° ε小且有限，前两项决定了解的大体位置，第 3 项作了解的修正；3° $\varepsilon\to0$ 时，只有非奇异解。

非奇异围绕问题：方法一：直接展开法，假设解非奇异且$\delta_n=\varepsilon^n$，$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots$；代入上述方程，匹配$\varepsilon^n$ 项，可以解得 $x_0,x_1,\cdots$。

方法二：迭代法。度规函数δ_n 与系数 x_n 依次待定。

主项平衡原理：方程中有主项和次要项，主项：其平衡给出领阶方程；次要项：主项的高阶小量。

仍以上述为例，将 $x\sim x_0\delta_0$ 代入，得到 $x_0^2\delta_0^2-x_0\delta_0+\varepsilon/4=0$。先保证阶数匹配。

case 0：主项有 1 项或有 3 项，无解或平凡解。

case a：主项(1)(2)，$\delta_0^2=\delta_0$，$\delta_0=1$，此时第 3 项$\varepsilon<<1$，满足主项平衡原理。

case b：主项(1)(3)，$\delta_0^2=\varepsilon$，此时$\delta_0>>\varepsilon$，不满足主项平衡。

case c：主项(2)(3)，$\delta_0=\varepsilon$，此时$\delta_0^2=\varepsilon^2$，满足主项平衡原理原理。

• ODE 问题的非奇异展开

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, x(0)=0, x'(0)=\alpha$，展开法：$O(\varepsilon^0): x_0''=-1, x_0(0)=0, x_0'(0)=\alpha$，

$O(\varepsilon^1): x_1''=2x_0, x_1(0)=0, x_1'(0)=0$，$O(\varepsilon^2): x_2''=2x_1-3x_0^2, x_2(0)=0, x_2'(0)=0$，可依次解出。当 $t=O(1/\sqrt{\varepsilon})$ 时，$x_0=O(1/\varepsilon)$，违反 AE 的基本假设。

• 奇异微扰问题

在$\varepsilon\to0$ 时，问题至少有一个解奇异。

举例：代数方程，$\varepsilon\to0$ 时，N 阶多项式方程退化为 M 阶多项式方程；微分方程，$\varepsilon\to0$ 时，高阶导数消失。

尺度调节法：奇异问题→引入新变量→非奇异问题

x 老尺度，X 新尺度。

1. 令 $x=\delta_0(\varepsilon)X$，代入原问题；2. 由主项平衡定$\delta_0(\varepsilon)$；3. 解关于 X 的非奇异问题；4. 由δ_0得到 X 的渐近展开。

- ODE 奇异扰动问题的例子

考虑米氏酶动力学模型，经过无量纲化，得到

$$\frac{ds}{dt}=-s(1-c)+\lambda(c),\varepsilon\frac{dc}{dt}=s(1-c)-\mu c,\frac{dp}{dt}=(\mu-\lambda)c,s(0)=1,c(0)=0,p(0)=0$$

其中 $\varepsilon=\frac{E_0}{S_0}<<1,\lambda=\frac{k_2}{k_1S_0}=O(1),\mu=\frac{k_2+k_3}{k_1S_0}=O(1)$ 无量纲。下面只考虑 s 和 c 的方程。这是奇异微扰问题。非奇异展开会发生矛盾。

拟稳态条件：$c_0=\frac{s_0}{s_0+\mu}$，得到米氏酶动力学方程：$\frac{ds_0}{dt}=-\frac{(\mu-\lambda)s_0}{s_0+\mu}$，初值应修正 $s_0(0+)=1,c_0(0+)=1/(1+\mu)$。在 $t\approx0$ 时拟稳态不成立。

尝试：捕捉反应初期快尺度动力学形态。

令$\sigma=t/\varepsilon$，$S(\sigma)=s(\sigma\varepsilon)$，$C(\sigma)=c(\sigma\varepsilon)$得到

$$\frac{dS}{d\sigma}=\varepsilon(-S(1-C)+\lambda C),\frac{dC}{d\sigma}=S(1-C)-\mu C,S(0)=1,C(0)=0$$

做非奇异渐近展开，得到 $S_0(\sigma)=1,C_0(\sigma)=\frac{1-e^{-(1+\mu)\sigma}}{1+\mu}$。

内部解：以σ为时间尺度；外部解：以 t 为时间尺度，$\lim\limits_{\sigma\to\infty}S_0/C_0(\sigma)=s_0/c_0(0)$。

8 概率、随机模型

- 果壳中的概率

随机过程：$\{x(t),t\in T\}$，$\{x_t,t\in Y\}$。

- 初等概率模型举例：随机人口模型

时刻 t 的人口数量用 $X(t)\in N$ 表示，记 $P_n(t)=Pr(X(t)=n),n=1,2,\cdots$。

模型假设：

1° 出生 1 个概率为 $b_n\Delta t$，$b_n=\lambda n$

2° 出生 2 人以上概率 $o(\Delta t)$

3° 死亡 1 人概率 $d_n\Delta t$，$d_n=\mu n$

4° 死亡 2 人以上概率 $o(\Delta t)$

5° 出生死亡独立

$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t+P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t+P_n(t)(1-b_n\Delta t-d_n\Delta t)+o(\Delta t)$，令$\Delta t\to0$，得到

$$\frac{dP_n}{dt}=\lambda(n-1)P_{n+1}+\mu(n+1)P_{n+1}-(\lambda+\mu)nP_n.$$

初值：$X(0)=n_0$，$P_{n_0}(0)=1$，$P_n(0)=0$，$n\neq n_0$。

令 $E(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}nP_n(t)$，从而 $\frac{dE(t)}{dt}=(\lambda-\mu)E(t)$，从而 $E(t)=n_0e^{(\lambda-\mu)t}$，类似得到

$$D(t)=n_0\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t}-1]。$$

- 马氏链模型和数学理论

考虑随机过程$\{x_t\}$，时间离散，$x_t\in S$，S 至多可数。若 $\Pr(x_{n+1}=j|x_n=i,\cdots,x_0=i_0)=\Pr(x_{n+1}=j|x_n=i)$，则称离散时间马氏链。

记 $P_{ij}(n)=\Pr(x_{n+1}=j|x_n=i)$，$P(n)=(P_{ij}(n))$位时刻 n 时的转移概率矩阵，若与 n 无关则称是时齐的。

- 马氏链选讲

以下只考虑 S 只有 k 个元素，马氏链时齐。令 $a_j(n)=\Pr(x_n=j)$，则$\Sigma_j a_j(n)=1$。

马氏链基本方程 $a_i(n+1)=\sum_{j=1}^{k}a_j(n)P_{ji}$，其中 $P_{ij}\geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{k}P_{ij}=1$。

记状态概率向量 $\mathbf{a}(n)=(a_1(n),\cdots,a_k(n))$，则 $\mathbf{a}(n+1)=\mathbf{a}(n)P$，$\mathbf{a}(n)=\mathbf{a}(0)P^n$。

不变分布：$\mathbf{F}$，满足 $\mathbf{F}=\mathbf{F}P$，且$\|\mathbf{F}\|_1=1$。则 $P^T\mathbf{F}^T=\mathbf{F}^T$，即 P^T 对应特征值是 1 的特征向量。

考虑转移矩阵(1-a,a;b,1-b)，则：

case A：$a+b\in(0,2)$，则 $\mathbf{a}(n)=\mathbf{a}(0)P^n\to(b/a+b,a/a+b)$是不变分布。

caseB：a=b=0，则 $P^n=P$ 单位阵。

caseC：a=b=1，则 $P^{2k}=I$，$P^{2k+1}=P$。P^n 极限不存在，但 $\lim\Sigma P^k/n=1/2\ I$。

Ehrenfest 模型：共 2a 个例子，x_0 是初始时 A 中粒子。$\{x_n\}$马氏链，$x_n=\{0,1,\cdots,2a\}$。

转移概率 $P_{ij}=(2a-i)/2a(j=i+1);i/2a(j=i-1)$。若不变分布 $\mathbf{F}$ 存在，求之。

一般形式：$F_i=F_{i-1}P_{i-1,i}+F_{i+1}P_{i+1,i}$。可以归纳得到 $F_i=C_{2a}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2a}$。这是一个二项分布。

等级结构：$\boldsymbol{n}(t)$，$n_i(t)$是第 t 年从属于等级 i 的人数，$\boldsymbol{a}(t)$是相应比例，$Q=(p_{ij})_{k\times k}$是等级 i 转移到等级 j 的人口比例(占等级 i 中)，$\boldsymbol{w}$ 是退出的人口比例(占等级 i 中)，$\boldsymbol{r}$ 是每年调入人口比例(占总人口)。

$N(t+1)=N(t)+R(t)-W(t)$，$\boldsymbol{n}(t+1)=\boldsymbol{n}(t)Q+R(t)\boldsymbol{r}$，用 $M(t)$表示净增长量，则 $R(t)=W(t)+M(t)=\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{w}^T+M(t)$，从而 $\boldsymbol{n}(t+1)=\boldsymbol{n}(t)(Q+\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r})+M(t)\boldsymbol{r}$。定义 $O=Q+\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r}$，则 Q 是概率转移矩阵。

(a1)进一步假设 $M(t)=0$，则 $\boldsymbol{a}(t+1)=\boldsymbol{a}(t)P$。

(a2)将调入比例 $\boldsymbol{r}$ 看成参数，给定 $\boldsymbol{r}$，(a1)模型相应的不变分布改变。

(a3)对某个等级结构 $\boldsymbol{a}$，存在调入比例 $\boldsymbol{r}$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}P$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是一个稳定的结构。

稳定结构的条件 $\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}Q}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{w}^T}$，此时 $\sum_{i=1}^{k}r_i=1$ 自动满足。稳定结构的范围：$\boldsymbol{a}\geqslant\boldsymbol{a}Q$。

设有一个理想比例 $\boldsymbol{a}^*$，已知 $\boldsymbol{a}(0)$，求 $\boldsymbol{r}$，使得 $\boldsymbol{a}(1)$尽可能接近 $\boldsymbol{a}^*$，$\boldsymbol{a}(2)$同理。

引入距离 $D(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(a_{1,(i)}-a_{2,(i)})^2$。

问题 E1：$\min_{\boldsymbol{r}} D(\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{a}(1)), s.t.\boldsymbol{a}(1)=\boldsymbol{a}(0)(Q+\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{r}), r_i\geq 0, \sum_{i=1}^{k}r_i=1$。

注意到 $\boldsymbol{a}^*$-$\boldsymbol{a}(1)$=$\boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\dfrac{\boldsymbol{a}^*-\boldsymbol{a}(0)Q}{\boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{w}^T}-\boldsymbol{r}:=\boldsymbol{y}$，则问题转化为

$\min\limits_{\boldsymbol{r}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(y_i-r_i)^2, s.t.\sum_{i=1}^{k}r_i=1, r_i\geq 0$。

• 随机微分方程模型

$\dfrac{dX}{dt}=b(t,X)+\sigma(t,X)\eta(t)$。噪声$\eta(t)$是一个随机过程，假设：1° E$\eta(t)$=0；2° $\eta(t)$平稳；3° E$\eta(t)\eta(s)$=0，$if\ t\neq s$。这种噪声也叫白噪声。$\eta(t)$无连续路径。

考虑离散时间 $t_0<t_1<\cdots$，$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$，记 $x_k=x(t_k)$。

离散形式 $x_{k+1}-x_k=b(t_k,x_k)\Delta t_k+\sigma(t_k,x_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\eta(s)ds$。$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\eta(s)ds=V(t_{k+1})-V(t_k):=\Delta V_k$。易指 E$V(t)$=0，若进一步要求 $V(t)$有连续路径，则 $V(t)$只能是布朗运动 W_t。

性质：1° EW_t=0；2° EW_tW_s=min(s,t)；3° $t>s$ 时，$W_t-W_s\sim$N$(0,t-s)$。

$x_k=x_0+\sum_{j=0}^{k-1}b(t_j,x_j)\Delta t_j+\sigma(t_j,x_j)\Delta W_j$，即 $x_t=x_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s$

微分形式 $dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t$。

定义：Ito integral：黎曼和中被积函数左端点取值的极限，记作$\int_0^t f(s,w)dW_s$。

性质：1° $E\int_0^t f(s,w)dW_s$=0；2° Ito isometry：$E\left(\int_0^t f(s,w)dW_s\right)^2=E\int_0^t f^2(s,w)ds$；

3° Ito lemma：令 X_t满足 $dX_t=b(t,w)dt+\sigma(t,w)dW_t$，又有 $g(t,x)$连续，则 $Y_t=g_t(t,X_t)$，

$dY_t=\dfrac{\partial g}{\partial t}dt+\dfrac{\partial g}{\partial x}dX_t+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)(dX_t)^2$。计算规则：$dtdt=dtdW_t=dW_tdt=0$，$(dW_t)^2=dt$。

• Fokker-Planck 方程

若σ=0，则 $dX_t=bd_t$，由守恒律$\rho_t+(\rho b)_x=0$。

任意光滑函数 $g(x)$，$dg(X_t)=\dfrac{\partial g}{\partial x}bdt+\dfrac{\partial g}{\partial x}\sigma dW_t+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\sigma^2 dt$。

两边取期望，得$\dfrac{dEg(X_t)}{dt}=E\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}b+\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$。固定 t，由 $X_t\sim\rho(t,x)$，从而两边

写开，分部积分，得到$\dfrac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)=-\dfrac{\partial}{\partial x}(b(x)\rho(t,x))+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x)\rho(t,x))$。