测度论

Chengxin Gong, Peking University

https://wqgcx.github.io/

2023 年 3 月 25 日

目录

1 可测空间和可测映射

1.1 集合及其运算

- 空间 (全集): X, 非空; 元素 (点): $x, y, \cdots$; 集合 (子集): $A, B, \cdots$; 空集: $\emptyset$.
- 指示函数: $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$; 余: $A^c := \{x : x \notin A\}$.
- 单调 (的集合) 序列: 非降, $A_n \uparrow$: $A_n \subset A_{n+1}, \forall n$; 非增, $A_n \downarrow$: $A_n \supset A_{n+1}, \forall n$.
- 单调序列的极限: 若 $A_n \uparrow$, 则 $\lim_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$; 若 $A_n \downarrow$, 则 $\lim_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- 任意序列的上极限: $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : \exists n_1 < n_2 < \cdots \text{使得} x \in A_{n_r}, \forall r \geq 1\} = \{A_n \text{ i.o.}\}$.
- 任意序列的下极限: $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n^c \text{ f.o.}\}$.
- 上下极限相等, 称极限存在, 记 $\lim_{n\to\infty} A_n$.

1.2 集合系

- 一些集合为元素组成的集合称为集合系, $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \cdots$.
- π 系: $\mathscr{P}$ 非空, 对交运算封闭. e.g. $X = \mathbb{R}, \mathscr{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.
- 半环: $\mathscr{Q}$ 是 π 系, 若 $A, B \in \mathscr{Q}$ 且 $A \supset B$, 则存在有限个两两不交的 $C_1, \cdots, C_n \in \mathscr{Q}$ 使得 $A \backslash B = \cup_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n} C_k$. e.g. $X = \mathbb{R}, \mathscr{Q}_{\mathbb{R}} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$.
- 环: $\mathscr{R}$ 非空, 对并、差运算封闭. e.g. $X = \mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}} = \cup_{n=1}^{\infty} \{\cup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] : a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k\}$.
- 域、代数：$\mathscr{A}$ 是 π 系, $X \in \mathscr{A}$, 且对补运算封闭.
- 半环是 π 系, 环是半环, 代数是环.
- 环 = 半环 + 对并运算封闭; 代数 = 环 + 含 X.
- 单调系: 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{M}$ 且 A_n 单调, 则 $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$.
- λ 系: $X \in \mathscr{L}$; $A, B \in \mathscr{L}$ 且 $A \supset B \Rightarrow A \backslash B \in \mathscr{L}$; $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{L}$ 且 $A_n \uparrow \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$.
- σ 代数 (σ 域): $X \in \mathscr{F}$; $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$; $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.
- λ 系是单调系; σ 代数是 λ 系.
- σ 代数 = 代数 + 单调系, σ 代数 = λ 系 + π 系.
- σ 环: $\mathscr{R}$ 非空; $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathscr{R}$; $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{R} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$.
- σ 环 = 环 + 对可列并运算封闭, σ 代数 = σ 环 + 含 X.
- 若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的 σ 代数, 则称 $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间.
- 设 A 是 X 的非空子集, $\mathscr{E}$ 是集合系, 定义 $A \cap \mathscr{E} := \{A \cap E : E \in \mathscr{E}\}$.

1.3 σ 代数的生成

- 称 $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{E}$ 生成的环 (单调系、λ 系、σ 代数), 若: (1) $\mathscr{G}\supset\mathscr{E}$; (2) 对任意环 (单调系、$\lambda$ 系、σ 代数)$\mathscr{G}'$, 均有 $\mathscr{G}'\supset\mathscr{E}\Rightarrow\mathscr{G}'\supset\mathscr{G}$. 分别记为 $r(\mathscr{E}),m(\mathscr{E}),l(\mathscr{E}),\sigma(\mathscr{E})$.
- 单调类定理: 若 $\mathscr{A}$ 是代数, 则 $\sigma(\mathscr{A})=m(\mathscr{A})$; λ-π 定理: 若 $\mathscr{P}$ 是 π 系, 则 $\sigma(\mathscr{P})=l(\mathscr{P})$.
- Borel 集: X 为拓扑空间, $\mathscr{O}$ 为所有开集组成的集合系. 称 $\mathscr{B}_X:=\sigma(\mathscr{O})$ 为 X 上的 Borelσ 代数/Borel 集合系. 若 $B\in\mathscr{B}_X$, 则称 B 为 Borel 集. 称 $(X,\mathscr{B}_X)$ 为拓扑可测空间.
- 若 $\mathscr{Q}$ 是半环, 则 $r(\mathscr{Q})=\cup_{n=1}^{\infty}\{\sum_{k=1}^{n}A_k:A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{Q}\text{且两两不交}\}$.

1.4 可测映射与可测函数

- 原像: $f^{-1}B:=\{x:f(x)\in B\},f^{-1}\mathscr{E}=\{f^{-1}B:B\in\mathscr{E}\}$.
- 对 Y 上的任意非空集合系 $\mathscr{E}$, $\sigma(f^{-1}\mathscr{E})=f^{-1}\sigma(\mathscr{E})$.
- 假设 $(X,\mathscr{F})$ 和 $(Y,\mathscr{S})$ 为两个可测空间, $f:X\to Y$. 若 $f^{-1}\mathscr{S}\subset\mathscr{F}$, 则称 f 是可测映射/随机元/可测的, 记为 $f:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{S})$ 或 $(X,\mathscr{F})\xrightarrow{f}(Y,\mathscr{S})$. $\sigma(f):=f^{-1}\mathscr{S}$ 是使 f 可测的最小 σ 域.
- 设 $\mathscr{E}$ 是 Y 上的非空集合系, 则 $(X,\mathscr{F})\xrightarrow{f}(Y,\sigma(\mathscr{E}))\Leftrightarrow f^{-1}\mathscr{E}\subset\mathscr{F}$.
- 若 $(X,\mathscr{F})\xrightarrow{f}(Y,\mathscr{S})\xrightarrow{g}(Z,\mathscr{Z})$, 则 $g\circ f$ 可测.
- 广义实数: $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. 四则运算: $\pm\infty\times 0=0$; $\infty-\infty,\infty/\infty$ 无意义. 令 $\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}}=\sigma(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}\cup\{\pm\infty\})$, 则 $\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}}=\sigma(\{[-\infty,a]:a\in\mathbb{R}\})$.
- 可测函数指 $f:(X,\mathscr{F})\to(\bar{\mathbb{R}},\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$, 随机变量指 $f:(X,\mathscr{F})\to(\bar{\mathbb{R}},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, 也称为有限的可测函数, 可测实值函数.
- $(X,\mathscr{F})$ 为可测空间, $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$(或 $f:X\to\mathbb{R}$), 则 f 为可测函数 (或随机变量) 当且仅当 $\{f\le a\}\in\mathscr{F},\forall a\in\mathbb{R}$.

1.5 可测函数的运算

- 可测函数的四则运算若有意义, 则可测; 可测函数的极值和上、下极限都可测.
- X 的有限分割: $\{A_1,\cdots,A_n\}$ 满足 $A_1,\cdots,A_n\subset X$, 两两不交且 $\cup_{i=1}^{n}A_i=X$. 有限可测分割还要求 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$.
- 简单函数: $f=\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{I}_{A_i}$, 其中 $\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为有限可测分割, $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$.
- 若 f 可测, 则存在简单的 $f_1,f_2,\cdots$ 使 $f_n\to f$; 若 $f\ge 0$, 则 $f_n\ge 0,\forall n$ 且 $f_n\uparrow f$; 若 f 有界, 则 $f_n\rightrightarrows f$.
- 设 $g:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{S})$, 则 $(X,g^{-1}\mathscr{S})\xrightarrow{h}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 当且仅当 $h=f\circ g$, 其中 $(Y,\mathscr{S})\xrightarrow{f}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

- 非负广义实值函数组成的单调类: $f, g \in \mathcal{M}, a, b \in \mathbb{R}, af + bg \geq 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M}$; $f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{M}, f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{M}$. 若 $\mathscr{A}$ 是代数, 且 $I_A \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathscr{A}$, 则 $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ 上的非负可测函数均在 $\mathcal{M}$ 中.

- 非负广义实值函数组成的 λ 类: $1 \in \mathcal{L}$; $f, g \in \mathcal{L}, a, b \in \mathbb{R}, af + bg \geq 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{L}$; $f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{L}, f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{L}$. 若 $\mathscr{P}$ 是 π 系, 且 $I_A \in \mathcal{L}, \forall A \in \mathscr{P}$, 则 $(X, \sigma(\mathscr{P}))$ 上的非负可测函数均在 $\mathcal{L}$ 中.

2 测度空间

2.1 测度的定义与性质

- 设 $\emptyset \in \mathscr{E}$, 若 $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ 满足可列可加性, 且 $\mu(\emptyset) = 0$, 则称 μ 为 $\mathscr{E}$ 上的测度. 若 $\mu(A) < \infty, \forall A \in \mathscr{E}$, 则称 μ 是有限的; 若 $\exists A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$ 两两不交使得 $X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $\mu(A_n) < \infty, \forall n$, 则称 μ 是 σ 有限的.

- $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{E} = \mathscr{Q}_{\mathbb{R}} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$, F 是右连续非降函数, 则 μ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度: $\mu((a, b]) = F(b) - F(a), a < b$; $\mu((a, b]) = 0, a \geq b$.

- 测度空间: $(X, \mathscr{F}, \mu)$; X: 非空集合; $\mathscr{F}$: X 上的 σ 代数; μ: $\mathscr{F}$ 上的测度; 零测集: $N \in \mathscr{F}, \mu(N) = 0$. 在一般的 σ 域上建立测度很复杂, 通常使用的办法是把半环上的测度扩张到它生成的 σ 域上去, 因此需要先讨论半环上非负集函数的性质.

- 单调性: $A, B \in \mathscr{E}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$; 可减性: $A, B \in \mathscr{E}$ 且 $A \subset B, B \backslash A \in \mathscr{E}, \mu(A) < \infty$, 则 $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$; 下连续性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}, A_n \uparrow A \in \mathscr{E}$, 则 $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$; 上连续性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}, A_n \downarrow A \in \mathscr{E}$ 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则 $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$; 次可列可加性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}, \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$, $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

- 半环上的测度有单调性, 可减性, 次可列可加性, 上、下连续性.

- μ 是环上的有限可加非负集函数, 则 μ 可列可加 $\Leftrightarrow$ μ 次可列可加 $\Leftrightarrow$ μ 下连续 $\Rightarrow$ μ 上连续 $\Rightarrow$ μ 在 $\emptyset$ 处连续, 即对任何满足 $A_n \downarrow \emptyset$ 和 $\mu(A_1) < \infty$ 的 $\{A_n \in \mathscr{R}, n = 1, 2, \cdots\}$, 有 $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$.

2.2 外测度

- 设 $\tau : \mathscr{T} \to [0, \infty]$ 满足 $\tau(\emptyset) = 0$; 若 $A \subset B \subset X$ 则 $\tau(A) \leq \tau(B)$; $\forall A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{T}$ 有 $\tau(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$; 则称 τ 为 X 上的外侧度. τ 为非负集函数、半可列可加、半有限可加.

- 设 μ 是集合系 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数, $\emptyset \in \mathscr{E}$ 且 $\mu(\emptyset) = 0$. 令 $\tau(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathscr{E}, n \geq 1; \cup_{n=1}^{\infty} B_n \supset A\}, \forall A \in \mathscr{T}$. 则 τ 是一个外测度, 称为由 μ 生成的外测度.

- 设 τ 为外测度, 若 A 满足 Caratheodory 条件 $\tau(D) = \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c), \forall D \in \mathscr{T}$, 则称 A 为 τ 可测集. 记 $\mathscr{F}_\tau$ 为所有 τ 可测集.

- 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间, 若 $A\in\mathscr{F},\mu(A)=0\Rightarrow B\in\mathscr{F},\forall B\subset A$, 则称 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 完备/完全.
- 若 τ 是外测度, 则 $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 代数, 且 $(X,\mathscr{F}_\tau,\tau)$ 是完备的测度空间.

2.3 测度的扩张

- 设 μ 和 ν 分别是集合系 $\mathscr{E},\overline{\mathscr{E}}$ 上的测度, 且 $\mathscr{E}\subset\overline{\mathscr{E}}$. 若 $\mu(A)=\nu(A),\forall A\in\mathscr{E}$, 则称 ν 是 μ 在 $\overline{\mathscr{E}}$ 上的扩张.
- 我们希望把一个集合系 $\mathscr{E}$ 的测度扩张到更大的集合系上. 表面上看, 前一节建立的外测度理论来解决测度扩张问题不错: 可以生成一个外测度 τ, 然后限制在 $\mathscr{F}_\tau$ 上. 但这是不对的! e.g. 设 $X=\{a,b,c\},\mathscr{E}=\{\emptyset,\{a,b\},\{b,c\},X\}$ 和 $\mu(\emptyset)=0,\mu(\{a,b\})=1,\mu(\{b,c\})=1,\mu(X)=2$. 按上面步骤扩张后发现 $\mathscr{F}_\tau=\{\emptyset,X\}$, 因此 $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 不是扩张.
- 扩张的唯一性: 设 $\mathscr{P}$ 是 π 系. 若 $\sigma(\mathscr{P})$ 上的测度 μ,ν 满足以下两条, 则 $\mu=\nu$: (1) $\mu|_{\mathscr{P}}=\nu|_{\mathscr{P}}$; (2) $\mu|_{\mathscr{P}}$ 是 σ 有限的.
- 测度扩张定理: 设 μ 是半环 $\mathscr{Q}$ 上的测度, τ 为 μ 生成的外测度, 则: $\sigma(\mathscr{Q})\subset\mathscr{F}_\tau,\tau|_{\mathscr{Q}}=\mu$.
- 设 $\mathscr{Q}$ 是半环, $X\in\mathscr{Q}$. 则 $\mathscr{Q}$ 上的任意 σ 有限的测度均可唯一的扩张到 $\sigma(\mathscr{Q})$ 上.
- 设 τ 是半环 $\mathscr{Q}$ 上的测度 μ 生成的外测度. 则: (1) $\forall A\in\mathscr{F}_\tau,\exists B\in\sigma(\mathscr{Q})$, 使得 $B\supset A$ 且 $\tau(A)=\tau(B)$; (2) 若 μ 是 σ 有限的, 则 $\forall A\in\mathscr{F}_\tau,\exists B\in\sigma(\mathscr{Q})$ 使得 $B\supset A$ 且 $\tau(B\backslash A)=0$.
- 测度的逼近: 设 μ 是代数 $\mathscr{A}$ 上的测度, τ 是 μ 产生的外测度. 若 $A\in\sigma(\mathscr{A})$ 且 $\tau(A)<\infty$, 则 $\forall\epsilon>0,\exists B\in\mathscr{A}$, 使得 $\tau(A\triangle B)<\epsilon$.
- 设 $\mathscr{A}$ 为代数, μ 是 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度, 在 $\mathscr{A}$ 上 σ 有限. 若 $A\in\sigma(\mathscr{A})$ 且 $\mu(A)<\infty$, 则 $\forall\epsilon>0,\exists B\in\mathscr{A}$ 使得 $\mu(A\triangle B)<\epsilon$.

2.4 测度空间的完全化

- $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间, 令 $\widehat{\mathscr{F}}:=\{A\cup N: A\in\mathscr{F},\exists B\in\mathscr{F}\text{使得}\mu(B)=0\text{且}N\subset B\}$. 令 $\widetilde{\mu}(A\cup N):=\mu(A),\forall A\cup N\in\widetilde{\mathscr{F}}$. 则 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 是 σ 域, $\widetilde{\mu}$ 良定义, $(X,\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mu})$ 是完备的测度空间, 称 $(X,\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mu})$ 为 $(X,\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mu})$ 的完备化/完全化.
- 设 τ 是半环 $\mathscr{Q}$ 上的 σ 有限测度 μ 生成的外测度, 则 $(X,\mathscr{F}_\tau,\tau)$ 是 $(X,\sigma(\mathscr{Q}),\tau)$ 的完备化.
- e.g. L-S 测度与分布: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 非降、右连续, 则称为准分布函数. $\nu=\nu_F:=(a,b]\mapsto(F(b)-F(a))\vee 0$ 为半环 $\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$ 上的测度, 且 σ 有限. 记 ν 生成的外测度为 $\tau=\lambda_F$. 称 $\mathscr{F}_\tau$ 中的集合为 Lebesgue-Stieljes 可测集, $f:(\mathbb{R},\mathscr{F}_\tau)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 为 L-S 可测函数, $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 为 L-S 测度. $(\mathbb{R},\mathscr{F}_\tau,\tau)$ 为测度空间, 其完备且 σ 有限, 是 $(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\tau)$ 的完备化. 反过来, 若 μ 为 $(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的测度, 且 $F=F\mu: x\mapsto\mu((-\infty,x]),x\in\mathbb{R}$ 为实值函数, 则 $\mu=\mu_F$ 且 $\mathscr{F}_{\lambda_F}=\{A\cup N: A\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\exists B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}\text{使得}\mu(B)=0,N\subset B\}$. 特别地, 若 $F=\mathrm{id}$, 我们得到 Lebesgue 可测集, Lebesgue 测度和 Lebsgue 可测函数.
- 设 $g:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{S})$, μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度. 令 $\nu(B):=\mu(g^{-1}B)=\mu\circ g^{-1}(B),\forall B\in\mathscr{S}$, 则 ν 是 $\mathscr{S}$ 上的测度.

- 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $f:(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. 称 $P\circ f^{-1}:B\to P(f\in B),\forall B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 为 f 的 (概率) 分布, 记为 μ_f. 若 $\mu_f=\mu$, 则称 f 服从分布 μ, 记为 $f\sim\mu$. 称 $F_f:=F_{\mu_f}$ 为 f 的分布函数, 其中 $F_f(x)=\mu_f((-\infty,x])=P(f\le x),x\in\mathbb{R}$. 若 $F_f=F$, 则也称 f 服从 F, 记为 $f\sim F$. 若 $F_f=F_g(\text{iff }\mu_f=\mu_g)$, 则称 $f=g$ 同分布, 记为 $f\overset{d}{=}g$.

2.5 可测函数的收敛性

- 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间, 子集 $A=$ 关于元素 x 的命题/性质. 若存在零测集 N 使得命题对所有 $x\in N^c$ 成立, 则说该命题几乎处处成立.
- 若 $\mu(\lim_{n\to\infty}f_n\neq f)=0$, 则说 $\{f_n\}$ 几乎处处以 f 为极限. 又若 f 几乎处处有限, 则说 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到 f, 记为 $f_n\overset{\text{a.e.}}{\to}f$.
- $f_n\overset{\text{a.e.}}{\to}f$ 当且仅当 $\forall\epsilon>0$, $\mu\left(\cap_{m=1}^{\infty}\cup_{n=m}^{\infty}\{|f_m-f|\ge\epsilon\}\right)=0$.
- 若 $\forall\delta>0,\exists A\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(A)<\delta$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\notin A}|f_n(x)-f(x)|=0$, 则说 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛到 f, 记为 $f_n\overset{\text{a.u.}}{\to}f$.
- $f_n\overset{\text{a.u.}}{\to}f$ 当且仅当 $\forall\epsilon>0$, 有 $\lim_{m\to\infty}\mu\left(\cup_{n=m}^{\infty}\{|f_n-f|\ge\epsilon\}\right)=0$.
- 若 $\forall\epsilon>0$ 均有 $\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|\ge\epsilon)=0$, 则称 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f, 记为 $f_n\overset{\mu}{\to}f$.
- 记 $A_n=\{|f_n-f|\ge\epsilon\}$, 则 $f_n\overset{\text{a.e.}}{\to}f$ iff $\forall\epsilon>0,\mu(\lim_{m\to\infty}\cup_{n=m}^{\infty}A_n)=0$; $f_n\overset{\text{a.u.}}{\to}f$ iff $\forall\epsilon>0,\lim_{m\to\infty}\mu(\cup_{n=m}^{\infty}A_n)=0$.
- $f_n\overset{\text{a.u.}}{\to}f\Rightarrow f_n\overset{\text{a.e.}}{\to}f$ 和 $f_n\overset{\mu}{\to}f$. 若 $\mu(X)<\infty$, 则 $f_n\overset{\text{a.u.}}{\to}f\Leftrightarrow f_n\overset{\text{a.e.}}{\to}f\Rightarrow f_n\overset{\mu}{\to}f$.
- $f_n\overset{\mu}{\to}f$ 当且仅当 $\{f_n\}$ 的任一子列存在其子列 $\{f_{n'}\}$ 使得 $f_{n'}\overset{\text{a.u.}}{\to}f$.
- 概率空间: 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $f,f_1,f_2,\cdots$ 是随机变量. 几乎处处收敛改称为几乎必然收敛, 依测度收敛该称为依概率收敛.
- 设 F 为实值函数, 记 $C(F)=\{x:F\text{在}x\text{连续}\}$. 设 $F,F_1,F_2,\cdots$ 是非降的实值函数, 若 $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x),\forall x\in C(F)$, 则称 $\{F_n\}$ 弱收敛到 F, 记为 $F_n\overset{w}{\to}F$.
- 设 $F,F_1,F_2,\cdots$ 是分布函数, $f_n\sim F_n,n=1,2,\cdots$. 若 $F_n\overset{w}{\to}F$, 则称 $\{f_n\}$ 依分布收敛到 F, 记为 $f_n\overset{d}{\to}F$. 又若 $f\sim F$, 则称 $\{f_n\}$ 依分布收敛到 f, 记为 $f_n\overset{d}{\to}f$.
- $f_n\overset{P}{\to}f\Rightarrow f_n\overset{d}{\to}f$.
- 若 $f_n\overset{d}{\to}f$, 则存在概率空间 $(\widetilde{X},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{P})$ 与其上随机变量 $\{\widetilde{f_n}\}$ 和 $\widetilde{f}$ 使得 $\widetilde{f}_n\overset{d}{=}f_n,n=1,2,\cdots,\widetilde{f}\overset{d}{=}f,\widetilde{f}_n\overset{\text{a.s.}}{\to}\widetilde{f}$.

3 积分

3.1 积分的定义

- 非负简单函数的积分: X 的可测划分: $\{A_i\},i=1,2,\cdots$ 满足 $\mu(A_i\cap A_j)=0,\forall i\neq j$ 且 $\mu\left((\cup_iA_i)^c\right)=0$. 非负简单函数: $\{A_i:i=1,2\cdots,n\}$ 为 X 的划分, $a_i\ge0,\forall i,f=\sum_{i=1}^na_iI_{A_i}$. f 的积分: $\int_Xfd\mu:=\sum_{i=1}^na_i\mu(A_i)$.

- 非负可测函数的积分: 若 $\{f_n\}$ 非负简单且 $f_n \uparrow f$, 则 $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
- 可测函数的积分: 若 $\min\{\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu\} < \infty$, 则称 f 的积分存在或积分有意义. 若 $\max\{\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu\} < \infty$, 则称 f 可积. 上述两种情况下, 将 f 的积分或积分值定义为 $\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.
- $\forall A \in \mathscr{F}, (A, \mathscr{F}_A, \mu_A)$ 为测度空间, 其中 $\mathscr{F}_A = \{A \cap B : B \in \mathscr{F}\}, \mu_A = \mu|_{\mathscr{F}_A}$. f 在 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分定义为 $\int_A f d\mu := \int_A f|_A d\mu_A = \int_X f I_A d\mu$.
- 若 f 的积分存在, 则 $|\int_X f d\mu| \le \int_X |f| d\mu$; f 可积当且仅当 $|f|$ 可积; 若 f 可积, 则 $|f| < \infty$ a.e..
- 若 f 积分存在, 则 $\int_A f d\mu = 0, \forall$ 零测集 A; 若 f, g 积分存在且 $f \ge g$ a.e., 则 $\int_X f d\mu \ge \int_X g d\mu$; 若 $f = g$ a.e., 则积分同时存在/不存在, 且 $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

3.2 积分的性质

- 线性: 设 f, g 的积分存在. $\forall a \in \mathbb{R}, af$ 的积分存在且 $\int_X (af) d\mu = a\int_X f d\mu$; 若 $\int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ 有意义, 则 $f + g$ a.e. 有意义, 积分存在且 $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.
- 设 f, g 可积. 若 $\int_A f d\mu \ge \int_A g d\mu, \forall A \in \mathscr{F}$, 则 $f \ge g$ a.e.; 若 $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, \forall A \in \mathscr{F}$, 则 $f = g$ a.e..
- 积分的绝对连续性: 设 f 可积, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall A \in \mathscr{F}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$.
- Levi 定理: $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}, f$ 均非负可测, 若 $f_n \uparrow f$ a.e., 则 $\int_X f_n d\mu \uparrow \int_X f d\mu$.
- 若 f 的积分存在, 则 $\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu, \forall$ 可测划分 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$.
- Fatou 引理: $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ a.e. 非负可测, 则 $\int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.
- Lebesgue 控制收敛定理: 假设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若存在非负可积的 g 使得 $|f_n| \ge g, \forall n \ge 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
- 积分变换公式: 设 $g : (X, \mathscr{F}, \mu) \to (Y, \mathscr{S})$. 对任意的 $(Y, \mathscr{S})$ 可测的 f, 若等式 $\int_Y f d\mu \circ g^{-1} = \int_X f \circ g d\mu$ 一端有意义, 则另一端也有意义, 且等式成立.

3.3 L_p 空间

- 设 $1 \le p < \infty$, 令 $||f||_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, L_p := \{f : ||f||_p < \infty\}$. L_p 是线性空间.
- 设 $1 \le p < \infty$, 令 $C_p = 2^{p-1}$, 则 $|a+b|^p \le C_p(|a|^p + |b|^p)$.
- 设 $1 < p, q < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \forall a, b \ge 0$, 等号成立当且仅当 $a = b$.
- Holder 不等式: 设 $1 < p, q < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $||fg|| \le ||f||_p ||g||_q, \forall f \in L_p, g$ 可测. 等号成立当且仅当存在不全为 0 的 $\alpha, \beta \ge 0$ 使得 $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ a.e..
- Minkowski 不等式: 设 $1 \le p < \infty$, 则 $||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p, \forall f, g \in L_p$. 等号成立的充要条件: (1) $p = 1 : fg \ge 0$; (2) $p > 1 :$ 存在不全为 0 的 $\alpha, \beta \ge 0$ 使得 $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ a.e..

- 完备性: 设 $1 \le p \le \infty$. 若 $\{f_n\} \subset L_p$ 满足 $\lim_{n,m\to\infty} ||f_n - f_m||_p = 0$, 则 $\exists f \in L_p$ 使得 $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$.
- 设 $0 < p < 1$, 令 $||f||_p := \int_X |f|^p d\mu, L_p := \{f : ||f||_p < \infty\}$. $(L_p, ||\cdot||)$ 是完备的距离空间.
- 设 $0 < p < \infty, f, f_1, f_2, \cdots \in L_p$. 若 $f_n \overset{L_p}{\to} f$, 则 $f_n \overset{\mu}{\to} f$ 且 $||f_n||_p \to ||f||_p$; 若 $f_n \overset{\text{a.e.}}{\to} f$ 或 $f_n \overset{\mu}{\to} f$, 则 $||f_n||_p \to ||f||_p \Leftrightarrow f_n \overset{L_p}{\to} f$.
- 设 $1 < p < \infty, f, f_1, f_2, \cdots \in L_p$. 若 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu, \forall g \in L_q$, 则称 $\{f_n\}$ 在 L_p 中弱收敛到 f, 记为 $f_n \overset{(w)L_p}{\longrightarrow} f$.
- $f_n \overset{L_p}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{(w)L_p}{\longrightarrow} f$.
- 设 $1 < p < \infty, \{f_n\} \subset L_p$ 且 $||f_n||_p \le M, \forall n$. 若 $f_n \overset{\text{a.e.}}{\to} f$(或$f_n \overset{\mu}{\to} f$), 则 $f \in L_p$ 且 $f_n \overset{(w)L_p}{\longrightarrow} f$.

3.4 概率空间的积分

- 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间, f 是随机变量. 称 f 的积分为 f 的期望, 记为 $\mathbb{E}f$.
- 若 g 是 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$ 上的可测函数, 则 $g \circ f$ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的可测函数, 且 $\mathbb{E} g \circ f = \int_\mathbb{R} g dF_f$.
- 设 $0 < s < t < \infty$, 则 $L_t \subset L_s$. 又若 $s \ge 1$, 则 $||f||_s \le ||f||_t, \forall f \in L_t$, 且等号成立当且仅当 f a.s. 为常数.
- 设 $0 < p < \infty, f \in L_p$, 称 $\mathbb{E}f^p$ 为 f 的 p 阶矩. 设 $k \ge 1, f \in L_k \subset L_1$, 称 $\mathbb{E}(f - \mathbb{E}f)^k$ 为 f 的 k 阶中心矩. 设 $f \in L_2$, 称 $\mathbb{E}(f - \mathbb{E}f)^2$ 为 f 的方差, 记为 $\mathrm{var} f$.
- 假设 $\{f_t, t \in T\}$ 是一族随机变量. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0$ 使得 $\mathbb{E}|f_t| I_{\{|f_t| > \lambda\}} < \epsilon, \forall t \in T$, 则称 $\{f_t, t \in T\}$ 一致可积. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall A \in \mathscr{F}, P(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}|f_t| I_A < \epsilon, \forall t \in T$, 则称 $\{f_t, t \in T\}$ 绝对连续.
- 一致可积当且仅当绝对连续且在 L_1 中有界.
- 若 $f_n \overset{P}{\to} f$, 则 $\forall 0 < p < \infty, |f_n|^p I_{\{|f_n| \le \lambda\}} \overset{P}{\to} |f|^p I_{\{|f| \le \lambda\}}, \forall \lambda \in C(F_{|f|})$.
- 设 $0 < p < \infty, \{f_n\} \subset L_p$ 且 $f_n \overset{P}{\to} f$. 则下列说法等价: (1) $\{|f_n|^p\}$ 一致可积; (2) $f_n \overset{L_p}{\to} f$; (3) $f \in L_p$ 且 $||f_n||_p \to ||f||_p$.

4 符号测度

4.1 符号测度

- 若 $\phi : \mathscr{F} \to \bar{\mathbb{R}}$ 满足可列可加性且 $\phi(\emptyset) = 0$, 则称 ϕ 为符号测度. 若 $|\phi(A)| < \infty, \forall A \in \mathscr{F}$, 则称 ϕ 是有限的. 若 $\exists X$ 的划分 $\{A_n\}$ 使 $|\phi(A_n)| < \infty, \forall n$, 则称 ϕ 是 σ 有限的.
- $\phi(A) < \infty, \forall A \in \mathscr{F}$ 或 $\phi(A) > -\infty, \forall A \in \mathscr{F}$. 以下约定 $\phi(A) > -\infty, \forall A \in \mathscr{F}$.
- $A \supset B$ 且 $|\phi(A)| < \infty$, 则 $|\phi(B)| < \infty$.
- 若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不交且 $|\phi(\sum_{n=1}^\infty A_n)| < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^\infty |\phi(A_n)| < \infty$.

4.2 Hahn 分解和 Jordan 分解

- 若 X 的分割 $\{X^+, X^-\}$ 满足: $\phi(A) \geq 0, \forall A \subset X^+; \phi(A) \leq 0, \forall A \subset X^-$. 则称 $\{X^+, X^-\}$ 为 ϕ 的 Hahn 分解.
- 若 ϕ^+, ϕ^- 是测度且 $\phi = \phi^+ - \phi^-$, 则称该式为 ϕ 的 Jordan 分解.
- 记 $\phi^*(A) := \sup\{\phi(B) : B \subset A\}$. 则 ϕ^* 非负、单调, $\phi^*(\emptyset) = 0$.
- 若 $\phi(A) < \infty$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \subset A$ 使得 $\phi(A_\epsilon) \geq 0$ 且 $\phi^*(A \backslash A_\epsilon) \leq \epsilon$.
- 设 $\phi(A) < 0$, 则 $\exists A_0 \subset A$ 使得 $\phi(A_0) < 0$ 且 $\phi^*(A_0) = 0$.
- Hahn 分解存在并在下列意义下唯一: 如果存在两个分解 $\{X_1^+, X_1^-\}$ 和 $\{X_2^+, X_2^-\}$, 则 $\forall A \in \mathscr{F}, A \subset X_1^+ \triangle X_2^+ \Rightarrow \phi(A) = 0; \forall B \in \mathscr{F}, B \subset X_1^- \triangle X_2^- \Rightarrow \phi(B) = 0$.
- Jordan 分解存在唯一: $\phi = \phi^+ - \phi^-$ 且 $\phi^+ = \phi^*, \phi^- = (-\phi)^*$. 注: $\phi = \mu - \nu$ 分解不唯一, 记 ϕ^+ 为 ϕ 的上变差, ϕ^- 为 ϕ 的下变差, $|\phi| := \phi^+ + \phi^-$ 为 ϕ 的全变差.

4.3 Radon-Nikodym 定理

- 若存在几乎处处意义下唯一的可测函数 f 使得 $\phi(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \mathscr{F}$, 则称 f 为 ϕ 对 μ 的 Radon-Nikodym 导数, 简称 R-N 导数或导数, 记为 $\frac{d\phi}{d\mu}$.
- 若 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \phi(A) = 0$, 则称 ϕ 对 μ 绝对连续, 记作 $\phi << \mu$. $\phi << \mu$ iff $\phi^\pm << \mu$.
- 若 μ 是 σ 有限的, 且 $\phi << \mu$, 则 $\frac{d\phi}{d\mu}$ 存在. 若 ϕ 是 σ 有限的, 则 f 是 μ-a.e. 有限的.

4.4 Lebesgue 分解

- φ, ϕ 都是符号测度. 若 $\varphi << |\phi| = \phi^+ + \phi^-$, 则称 φ 对 ϕ 绝对连续, 记作 $\varphi << \phi$.
- 若 $\exists N \in \mathscr{F}$ 使得 $|\varphi|(N^c) = |\phi|(N) = 0$, 则称 φ 和 ϕ 相互奇异, 记为 $\varphi \perp \phi$.
- $\varphi \perp \phi$ 当且仅当 $\exists N \in \mathscr{F}$ 使得 $\varphi(A \cap N^c) = \phi(A \cap N) = 0, \forall A$.
- 若 $\varphi << \phi$ 且 $\varphi \perp \phi$, 则 $\varphi \equiv 0$.
- Lebesgue 分解: φ, ϕ 都是 σ 有限的符号测度, 则存在唯一一对 σ 有限的符号测度 φ_c, φ_s 使得 $\varphi = \varphi_c + \varphi_s, \varphi_c << \phi, \varphi_s \perp \phi$.
- Ex. 分布与随机变量的分布. 设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$ 上的概率分布. 若 $\mu << \lambda$, 则称 μ 为连续型, 称 $\frac{d\mu}{d\lambda}$ 为 μ 的密度.
- 若 $\mu(\{x\}) > 0$, 则称 x 为 μ 的原子, μ 有限 $\Rightarrow D$ 可数, 其中 $D = D_\mu := \{x \in \mathbb{R}, \mu(\{x\}) > 0\}$. 若 $\mu(D) = 1$, 则称 μ 为离散型, 记 $p_n = \mu(\{x_n\}), \forall n$, 称 $\{(x_n, p_n)\}$ 为 μ 的分布列.
- 若 $\mu \perp \lambda$ 且 $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 则称 μ 为奇异型.

- μ 关于 λ 的 Lebesgue 分解: $\mu = \mu_c + \mu_s, \mu_1 := \mu_c << \lambda, \mu_s \perp \lambda$. μ 的所有原子组成可数集 D, 令 $\mu_2(A) := \mu_s(A \cap D), \mu_3 := \mu_s - \mu_2$. 令 $\alpha_i = \mu_i(\mathbb{R}), i = 1, 2, 3$. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. 若 $\alpha_i = 1$, 则 $\mu = \mu_i$. 此时 μ 为连续型/离散型/奇异型.

- 存在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 连续型分布 $\widetilde{\mu}_1$, 离散型分布 $\widetilde{\mu}_2$, 奇异型分布 $\widetilde{\mu}_3$, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 且 $\mu = \alpha_1 \widetilde{\mu}_1 + \alpha_2 \widetilde{\mu}_2 + \alpha_3 \widetilde{\mu}_3$.

4.5 条件期望和条件概率

- 设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数: $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 且 $\mathscr{G}$ 是 σ 代数.

- 称满足下列 (1),(2) 的 f^* 为 f 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望, 记为 $\mathbb{E}(f|\mathscr{G})$: (1) f^* 是 $(X, \mathscr{G}, P)$ 上积分存在的可测函数; (2) $\forall A \in \mathscr{G}$, $\mathbb{E}f^* I_A = \mathbb{E}f I_A$, 即 $\int_A f^* dP = \int_A f dP$.

- A 关于 $\mathscr{G}$ 的条件概率指 $P(A|\mathscr{G}) := \mathbb{E}(I_A|\mathscr{G})$.

- 设 $g : (X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{S})$. f 关于 g 的条件期望, A 关于 g 的条件概率分别指 $\mathbb{E}(f|g) := \mathbb{E}(f|\sigma(g)), P(A|g) := \mathbb{E}(I_A|g)$.

- 设 $\{A_t, t \in T\} \subset \mathscr{F}$. 若 $n \geq 2, \{t_1, \cdots, t_n\} \subset T, P(\cap_{k=1}^n A_{t_i}) = \prod_{k=1}^n P(A_{t_k})$, 则称 $\{A_t, t \in T\}$ 相互独立.

- 设 $\mathscr{E}_t \subset \mathscr{F}, \forall t \in T$. 若任取 $A_t \in \mathscr{E}_t, t \in T$, 总有 $\{A_t, t \in T\}$ 相互独立, 则称 $\{\mathscr{E}_t, t \in T\}$ 相互独立. 设 $\{f_t, t \in T\}$ 是随机变量族. 若 $\{\sigma(f_t), t \in T\}$ 相互独立, 则称 $\{f_t, t \in T\}$ 相互独立.

- 设 f 是积分存在的随机变量. 若 f 与 $\mathscr{E}$ 相互独立, 则 $\mathbb{E}(f I_A) = (\mathbb{E}f) \cdot P(A)$.

- 设 f, g 是积分存在的随机变量, $\mathscr{G}, \mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数. (1) 可测性: 若 f 关于 $\mathscr{G}$ 可测, 则 $\mathbb{E}(f|\mathscr{G}) = f$ a.s.; (2) 独立性: 若 f 与 $\mathscr{G}$ 独立, 则 $\mathbb{E}(f|\mathscr{G}) = \mathbb{E}f$ a.s.; (3) 重条件期望公式: 若 $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}_0$, 则 $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathscr{G})|\mathscr{G}_0) = \mathbb{E}(f|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathscr{G}_0)|\mathscr{G})$ a.s.; (4) 单调性: 若 $f \leq g$ a.s., 则 $\mathbb{E}(f|\mathscr{G}) \leq \mathbb{E}(g|\mathscr{G})$ a.s.; (5) 线性: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 若 $a\mathbb{E}f + b\mathbb{E}g$ 有意义, 则 $\mathbb{E}(a\mathbb{E}f + b\mathbb{E}g|\mathscr{G}) = a\mathbb{E}(f|\mathscr{G}) + b\mathbb{E}(g|\mathscr{G})$ a.s..

- 设 $f, f_1, f_2, \cdots$ 是积分存在的随机变量, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数. (1) Levi 定理、单调收敛定理: 若 $0 \leq f_n \uparrow f$ a.s., 则 $0 \leq \mathbb{E}(f_n|\mathscr{G}) \uparrow \mathbb{E}(f|\mathscr{G})$ a.s.; (2) Fatou 引理: 若 $f_n \geq 0$ a.s., 则 $\mathbb{E}(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n|\mathscr{G}) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_n|\mathscr{G})$ a.s.; (3) Lebesgue 控制收敛定理: 若 $|f_n| \leq g \in L_1, n = 1, 2, \cdots$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ a.s., 则 $\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} f_n|\mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_n|\mathscr{G})$ a.s..

- 条件期望的线性: 设 f, g 是随机变量, f, fg 的积分存在, g 是 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 上的可测函数, 则 $\mathbb{E}(fg|\mathscr{G}) = g\mathbb{E}(f|\mathscr{G})$ a.s..

- 条件概率的性质：(1) 若 $A \subset B$, 则 $0 \leq P(\emptyset|\mathscr{G}) \leq P(A|\mathscr{G}) \leq P(B|\mathscr{G}) \leq P(X|\mathscr{G}) = 1$ a.s.; (2) 若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不交, 则 $P(\cup_{n=1}^\infty A_n|\mathscr{G}) = \sum_{n=1}^\infty P(A_n|\mathscr{G})$ a.s..

- 假设 $P_{\mathscr{G}}(\cdot, \cdot)$ 是 $X \times \mathscr{F}$ 上的二元函数. 若满足以下两条, 则称 $P_{\mathscr{G}}(\cdot, \cdot)$ 为关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率: (1) 固定 $x \in X, P_{\mathscr{G}}(x, \cdot) : A \mapsto P_{\mathscr{G}}(x, A)$ 作为 $\mathscr{F}$ 上的函数是概率测度; (2) 固定 $A \in \mathscr{F}, P_{\mathscr{G}}(\cdot, A) : x \mapsto P_{\mathscr{G}}(x, A)$ 作为 X 上的函数是 $P(A|\mathscr{G})$, 即 $P_{\mathscr{G}}(\cdot, A) \in \mathscr{G}$ 且 $P(AB) = \mathbb{E}P_{\mathscr{G}}(\cdot, A) \times 1_B, \forall B \in \mathscr{G}$.

- 设 f 是随机变量. 若 $X \times \mathbb{R}$ 上的二元函数 $F_{f|\mathscr{G}}(\cdot,\cdot)$ 满足以下两条, 则称它为 f 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布函数: (1) 固定 $x \in X, F_{f|\mathscr{G}}(x,\cdot) : a \mapsto F_{f|\mathscr{G}}(x,a)$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的函数是分布函数; (2) 固定 $a \in \mathbb{R}, F_{f|\mathscr{G}}(\cdot,a) : x \mapsto F_{f|\mathscr{G}}(x,a)$ 作为 X 上的函数是 $P(f \leq a|\mathscr{G}) = P(\{f \leq a\}|\mathscr{G})$, 即 $F_{f|\mathscr{G}}(\cdot,a) \in \mathscr{G}$ 且 $P(\{f \leq a\} \cap B) = \mathbb{E}F_{f|\mathscr{G}}(\cdot,a) \times 1_B, \forall B \in \mathscr{G}$.

- 设 f 是随机变量, 则正则条件分布函数 $F_{f|\mathscr{G}}(\cdot,\cdot)$ 存在.

- 设 $\mu_{f|\mathscr{G}}$ 是 $X \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 上的二元函数: $\mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,\cdot) : X \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, (x,B) \mapsto \mu_{f|\mathscr{G}}(x,B)$, 满足: (1) 固定 $x \in X, \mu_{f|\mathscr{G}}(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 上的分布; (2) 固定 $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,B) = P(f \in B|\mathscr{G})$ a.s.. 即, $\mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,B)$ 是 $(X,\mathscr{G})$ 上的可测函数, 且 $P((f^{-1}B)\cap A) = \int_A \mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,B)dP, \forall A \in \mathscr{G}$. 则称 $\mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,\cdot)$ 为 f 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布.

- 设 g 为 Borel 函数. 若 $\mathbb{E}g(f)$ 有意义, 则 $\mathbb{E}(g(f)|\mathscr{G})(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} g(y)F_{f|\mathscr{G}}(\cdot,dy) = \int g(y)\mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,dy)$ a.s.. 特别地, 若 $\mathbb{E}f$ 有意义, 则 $\mathbb{E}(f|\mathscr{G})(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} yF_{f|\mathscr{G}}(\cdot,dy) = \int_{\mathbb{R}} y\mu_{f|\mathscr{G}}(\cdot,dy)$ a.s..

- 记 $\mu_g(B) = P(g^{-1B}), \forall B \in \mathscr{S}$. 若 $h : (Y,\mathscr{S}) \to (\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 满足 $\int_{g^{-1}B} f dP = \int_B h(y)d\mu_g(y), \forall B \in \mathscr{S}$, 则称 $h(\cdot)$ 为 f 关于 g 的给定值的条件期望, 记为 $\mathbb{E}(f|g=\cdot)$.

- 若二元函数 $\mu_{f|g}(\cdot,\cdot) : Y \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, (y,B) \mapsto \mu_{f|g}(y,B)$ 满足: (1) $\forall y \in Y, \mu_{f|g}(y,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 上的分布; (2) $\forall B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \mu_{f|g}(\cdot,B) = P(f \in B|g=\cdot)$ a.s., 则称它为 f 关于 g 的给定值的正则条件分布.

- f 关于 g 的给定值的正则条件分布 $\mu_{f|g}(\cdot,\cdot)$ 存在, 且对任意 Borel 函数 h, 若 $\mathbb{E}h(f)$ 有意义, 则 $\mathbb{E}(h(f)|g=\cdot) = \int_{\mathbb{R}} h(y)\mu_{f|g}(\cdot,dy)$ a.s..