

数学分析 II 习题课讲义 (2026 春)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2026 年 4 月 9 日

目录

1	Riemann 积分的定义与函数的可积性	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	积分的计算	3
2.1	问题	3
2.2	解答	4
3	积分的进一步性质, 近似计算与应用	7
3.1	问题	7
3.2	解答	8
4	广义积分	11
4.1	问题	11
4.2	解答	12
5	正项级数与任意项级数	15
5.1	问题	15
5.2	解答	15
6	数项级数的运算与无穷乘积	18
6.1	问题	18
6.2	解答	19
7	函数项级数的一致收敛	21
7.1	问题	21
7.2	解答	21
8	函数项级数极限函数的分析性质	23
9	致谢	23

1 Riemann 积分的定义与函数的可积性

1.1 问题

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.
- 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
- 函数 $g(x) \in R[a, b], f(u) \in C[A, B]$, 这里 A, B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x)) \in R[a, b]$.
- $f(x) \in R[a, b]$, 问 $\lfloor f(x) \rfloor$ 是否一定 $\in R[a, b]$?
- $f(x) \in R[a, b], \int_a^b f(x) dx > 0$. 证明 $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b], \text{ s.t. } \forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > 0$.
- 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) > 0$. 证明 $\int_a^b f(x) dx > 0$.
- 已知 $(0, 1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x) \in R[0, 1]$?
- $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, \cdots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$.
- 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 试证明 $f(x) \in R[a, b]$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$; (2) $\int_a^b [h(x) - g(x)] dx < \varepsilon$.
- $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.
- 试构造可积函数 f 和连续函数 g 使得 $f \circ g$ 不可积. 如果额外要求 g 是 C^∞ 函数呢?

1.2 解答

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } \forall n > N, n^\alpha(1-\varepsilon) < a_n < n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \varepsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \varepsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \leq \varepsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. 这意味着 $\left| \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha \right) \right| \leq 4\varepsilon \Rightarrow$ 原极限 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.
- 原式 $= 2^{\alpha-\beta} \frac{[\frac{2}{n}(\frac{1}{n})^\alpha + \frac{2}{n}(\frac{3}{n})^\alpha + \cdots + \frac{2}{n}(\frac{2n+1}{n})^\alpha]^{\beta+1}}{[\frac{2}{n}(\frac{2}{n})^\beta + \frac{2}{n}(\frac{4}{n})^\beta + \cdots + \frac{2}{n}(\frac{2n}{n})^\beta]^{\alpha+1}} \stackrel{\text{定积分定义}}{\sim} 2^{\alpha-\beta} \frac{(\int_0^2 x^\alpha dx)^{\beta+1}}{(\int_0^2 x^\beta dx)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.
- 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall \delta > 0, \exists \tau > 0 \text{ s.t. } \forall |x-x'| < \tau, |f(x)-f(x')| < \delta$. 从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ s.t. } \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1}, x_i] : w_i^{f \circ g} > \delta\} \subset \{[x_{i-1}, x_i] : w_i^g > \tau\}$, 从而 $\sum_{w_i^{f \circ g} > \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$, 即 $f \circ g$ 可积.
- $f(x) = -\text{Riemann}(x) \in R[0, 1], \lfloor f(x) \rfloor = -\text{Dirichlet}(x) \notin R[0, 1]$.
- 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
- 由 Lebesgue 定理知 $f(x)$ 存在连续点 $x_0 \in (a, b)$. 因此 $\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq f(x_0)\delta > 0$.

想一想: 你能不用 Lebesgue 定理找到连续点吗?

由 $f(x) \in R[a, b]$ 知存在 $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, 使得 $w_{[a_1, b_1]}^f < 1$. 同理, 由 $f(x) \in R[a_1, b_1]$ 知存在 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ 使得 $w_{[a_2, b_2]}^f < \frac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于 $w_{[a_n, b_n]}^f < \frac{1}{n}$, 只需取 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$ 即可.

7. 考虑 $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x) dx$ 不存在.

8. $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x - x_1) f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2 . 依此类推, $\int_a^b \left[\prod_{i=1}^n (x - x_i) \right] f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 $n + 1$ 个零点.

9. 由聚点原理知有界性, 即 $|f(x)| \leq M$. 其次 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{U_0(x, \delta_x)} < \varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. 取分割点 $y_0 = a, y_{3i+1} = x_i - \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+2} = x_i + \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+3} \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}), y_{3n} = b, i = 1, 2, \dots, n-1$. 对此分割, $\sum_{i=1}^{3n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a+1)$, 因此有可积性. 由于 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^{3n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a+1)$, 由 ε 的任意性知 $\int_a^b f(x) dx = 0$.

10. 必要性: $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 阶梯函数 $s_1(x), s_2(x)$ 满足 $s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x)$ 且 $\int_a^b [s_2(x) - s_1(x)] dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 连续函数 $g(x), h(x)$ 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 $\int_a^b [h(x) - g(x)] < \varepsilon$.

充分性: $g(x)$ 连续, $\int_a^b [h(x) - g(x)] dx < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i^g (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\sum_{i=1}^n w_i^f (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} + w_i^g \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

11. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2} f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x) dx = f(\alpha) \frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha) \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2} f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

12. 设 \mathcal{C} 是 fat cantor set. 考虑 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, $g(x) = 1 - \text{dist}(x, \mathcal{C})$, 但 $f(g(x)) = 1_{x \in \mathcal{C}}$ 在正测集 \mathcal{C} 上不连续. 若额外有 $g(x) \in C^\infty$, 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

2 积分的计算

2.1 问题

1. 试构造 $f(x) \in D[0, 1]$ 但 $f'(x) \notin R[0, 1]$ 的例子. 如果额外加上 $f'(x)$ 有界条件呢?

2. $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$.

3. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$.

【编者注】本题实际上是 $\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1$.

想一想: 你能不能推广这个共轭指数条件?

设 $0 < q \leq p \leq s \leq \infty$, 则存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p \leq \|f\|_q^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$.

4. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\left(\int_a^b (f+g)^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

5. 设函数 $f(x), g(x) \in R[a, b]$, 记 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$. 任取 $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 证明 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
6. 设函数 $f(x) \in C^1[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: (1) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx$; (2) 若 $\int_a^b f^2(x)dx = 1$, 则 $\int_a^b [f'(x)]^2dx \int_a^b [xf(x)]^2dx \geq \frac{1}{4}$.
7. $f(x) \in C[a, b]$, 且 $\exists \delta > 0, M > 0$, s.t. $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 成立 $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
8. 用定积分的方法求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
9. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$.
10. 求积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx$.
11. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2025} x} dx$.
12. 求积分 $I = \int_0^1 [\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}] dx$.
13. 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.
14. 设 $A(r) = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2) dx$. 证明: (1) $\forall r \in (-1, 1), 2A(r) = A(r^2)$; (2) $A(r)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上有界; (3) $\forall r \in (-1, 1), A(r) \equiv 0$.
15. $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续. (1) 若 $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$, 证明 $f(t) \leq 1 + t$. (2) 若 $f(t) \leq K + \int_0^t f(s)g(s)ds$, 其中 $K \geq 0$ 是常数, 证明 $f(1) \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right)$.

2.2 解答

1. 可以验证 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in D[0, 1]$, 但 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0, 1]$ 上无界. 若额外有 $f'(x)$ 有界, 可参考 Volterra's function.

2. 往证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = 0$.

设 $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq M$. 由连续性知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. 注意到

$$\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = \underbrace{\frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}}_{I_1} + \underbrace{\frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}}_{I_2} + \underbrace{\frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}}_{I_3}$$

其中, $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon$,

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} \right)^n.$$

由于 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可取足够大的 n 使得 $|I_2| < \varepsilon$. 类似 I_2 放缩 I_3 . 此时 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\varepsilon$.

3. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我

们有 $\alpha \ln a + (1 - \alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1 - \alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1 - \alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq$

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b \left(\frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

【编者注】这个题可以将积分离散化后使用离散版本的不等式.

4. 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)^p dx &= \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \\ &\leq \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned}$$

两边同时消去 $\left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$ 得到原不等式.

【编者注】这个题也可以将积分离散化后使用离散版本的不等式.

5. $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$. 显然 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)dx$. 记

$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \leq \sum_{i=1}^n M_f \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = M_f [\bar{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \xrightarrow{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} 0$.

6. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) [x f(x)]' dx = - \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b x f(x) f'(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

7. 不妨设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists \kappa > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa)$,

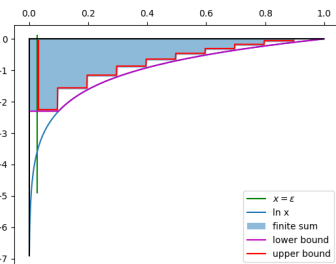
成立 $\left| \int_\alpha^\beta f(x) dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ (最后一个大于号成立只需令 $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M} \right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

8. 取对数得 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{i}{n}$. 由右图几何面积关系, $\forall \varepsilon > 0, \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{i}{n} \leq \int_\varepsilon^1 \ln x dx =$

$[x \ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon$, 且 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{i}{n} \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = -1 + \frac{2}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.

令 $n \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0$ 知 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{i}{n} = -1$, 因此原极限为 e^{-1} .

【编者注】本题不太方便直接使用原始定积分定义, 因为函数 $\ln(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是无界的.



9. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1 - \cos x) \stackrel{\text{分部积分}}{=} (1 - \cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) d(\ln \sin x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx =$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = [\cos x - \ln(1 + \cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1.$$

$$10. I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1 + e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

11. 记 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{2025} x} dx$. 作换元 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 知 $I = J$. 而 $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I = J = \frac{\pi}{4}$.

$$12. \int_0^1 \sqrt[7]{1-x^3} dx \stackrel{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=} \int_0^1 y dx \stackrel{\text{几何意义}}{=} \int_0^1 x dy = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy \Rightarrow I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy - \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} dx = 0.$$

13. 利用三角函数公式,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2\sin^2 x) + 2\sin[(2n-2)x]\sin x \cos x}{2\sin x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2\sin[(2n-2)x]\sin x \cos x}{2\sin x} dx \\
 &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\
 &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}.
 \end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

14. (1) 做变量替换 $x = \pi - t$, 得到

$$A(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt = \int_{-\pi}^0 \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt + \int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt.$$

对第一部分做变量代换 $t = 2\pi + u$, 得到

$$A(r) = \int_{\pi}^{2\pi} \log(1 + 2r \cos(\pi + u) + r^2) du + \int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt = \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt = A(-r).$$

从而有

$$\begin{aligned}
 2A(r) &= A(r) + A(-r) = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2) dx + \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r \cos x + r^2) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \log[(1 - 2r \cos x + r^2)(1 + 2r \cos x + r^2)] dx = \int_0^{2\pi} \log[(1 + r^2)^2 - 4r^2 \cos^2 x] dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \log[1 + 2r^2(1 - 2\cos^2 x) + r^4] dx = \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos(2x) + r^4) dx.
 \end{aligned}$$

做变量代换 $y = 2x$, 得到

$$2A(r) = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy$$

再做变量代换 $z = y - 2\pi$, 得到

$$\begin{aligned}
 2A(r) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos(z + 2\pi) + r^4) dz \\
 &= \frac{1}{2} A(r^2) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos z + r^4) dz = \frac{1}{2} A(r^2) + \frac{1}{2} A(r^2) = A(r^2).
 \end{aligned}$$

(2) 对任意 $r \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 由于

$$\log(1 - 2r \cos x + r^2) \leq \log(1 + 2|r| + r^2) \leq \log \frac{9}{4}, \quad \log(1 - 2r \cos x + r^2) \geq \log(1 - 2|r| + r^2) \geq \log \frac{1}{4}.$$

从而 $2\pi \log \frac{1}{4} \leq A(r) = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2) dx \leq 2\pi \log \frac{9}{4}$, 因此有界.

(3) 由 (1) 问知 $A(r) = \frac{1}{2} A(r^2) = \frac{1}{2^2} A(r^4) = \dots = \frac{1}{2^n} A(r^{2^n})$. 选取足够大的 N , 使得 $\forall n > N$ 成立 $|r^{2^n}| < \frac{1}{2}$. 由 (2) 问有界性知 $2\pi \log \frac{1}{4} \leq A(r^{2^n}) \leq 2\pi \log \frac{9}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} A(r^{2^n}) = 0$. 所以 $A(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} A(r^{2^n}) = 0$.

【编者注】当然了, 你也可以直接求导验证. 对 $\forall r \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned}
 A'(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2\cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2\cos x}{(r - \cos x)^2 + \sin^2 x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2\cos x}{(r - \cos x + i \sin x)(r - \cos x - i \sin x)} dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r - \cos x + i \sin x} + \frac{1}{r - \cos x - i \sin x} \right) dx := I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

利用换元 $x = 2\pi - x$ 知 $I_1 = I_2$. 然后, 利用等比数列求和 (幂级数展开), 知

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r - e^{ix}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-e^{ix}} \frac{1}{1 - re^{-ix}} dx = \int_0^{2\pi} -e^{-ix} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-inx} \right) dx \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{-i(n+1)x} \right) dx = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{i(n+1)} e^{-i(n+1)x} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

因此 $A'(r) \equiv 0$. 由于显然有 $A(0) = 0$, 因此对 $\forall r \in (-1, 1)$, $A(r) \equiv 0$.

15. (1) 原条件等价于 $\frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds}} \leq 1 \xrightarrow{\text{两边积分}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \xrightarrow{\text{原函数}} \sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow$

$$\sqrt{1 + 2 \int_0^x f(s) ds} \leq 1 + x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1 + 2 \int_0^x f(s) ds} \leq 1 + x.$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t f(s)g(s) ds \exp \left(- \int_0^t g(s) ds \right) \right]' &= f(t)g(t) \exp \left(- \int_0^t g(s) ds \right) - g(t) \int_0^t f(s)g(s) ds \exp \left(- \int_0^t g(s) ds \right) \\ &\leq K g(t) \exp \left(- \int_0^t g(s) ds \right) = \left[K - K \exp \left(- \int_0^t g(s) ds \right) \right]', \end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s) ds \exp \left(- \int_0^1 g(s) ds \right) \leq K - K \exp \left(- \int_0^1 g(s) ds \right) \Rightarrow f(1) \leq K + K \int_0^1 f(s)g(s) ds \leq K \exp \left(\int_0^1 g(s) ds \right).$$

【编者注】请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数 K 也是为了保证两边在 $t = 0$ 处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.

3 积分的进一步性质, 近似计算与应用

3.1 问题

- $f(x) \in C[a, b]$, 且对任意 $g(x) \in C^\infty[a, b]$ 满足 $g(a) = g(b) = 0$ 都有 $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
- $f(x) \in R[0, 1]$, $0 < m \leq f(x) \leq M$. 证明 $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$.
- 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a, b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0$.
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$. (能试着用定积分第二中值定理吗?)
- 已知 $b > e^2$, 证明 $\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} < \frac{2b}{\ln b}$. BTW, 你能不能找到最优常数 $C \geq 0$, 使得 $\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} + C \leq \frac{2b}{\ln b}$ 恒成立.
- $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
- $f(x)$ 在 \mathbb{R}_+ 上是凸函数. 证明 $f(x)$ 在 \mathbb{R}_+ 上内闭可积, 且 $F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 也是 \mathbb{R}_+ 上的凸函数.
- $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
- $f(x) \in D[0, 1]$, $f'(x) \in R[0, 1]$, $|f'(x)| \leq M$. 定义 $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. (1) 证明 $|A_n| \leq \frac{M}{2n}$. (2) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n A_n$.

想一想: 你能不能推广到高阶光滑和高维情形?

一般情况下, 若 d 维函数 $f(x) \in D^k[0, 1]^d$ (或任意紧集), 那么 k 阶面积法对定积分的逼近速率是 $O(n^{-\frac{k}{d}})$. 这反映了维数灾难 (curse of dimensionality). 你有什么好的办法?

10. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.
11. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?
12. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r, \theta) = (1, 0)$ 和 $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$ 之间一段的重心坐标.
13. 求双扭线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
14. 证明 π 是无理数. 可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i \in \mathbb{N}_+$, $f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ 也是整数. (3) 证明 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$, 得到矛盾.
15. (Jensen 不等式). 凸函数 $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ 可积且 $\int_a^b p(x) dx > 0$. 证明对于任意 $f(x) \in R[a, b]$,
- $$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

3.2 解答

1. 用反证法. WLOG 设 $f(x_0) > 0$, 由连续性知 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \\ 0, & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b], \\ C^\infty \text{连接}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时 $\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} \frac{f^2(x_0)}{4} dx > 0$, 矛盾.

2. 注意到 $(M - f(x))\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m}\right) \leq 0$, 因此 $\int_0^1 (M - f(x))\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m}\right) dx \leq 0 \Leftrightarrow M \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{m} \int_0^1 f(x) dx \leq 1 + \frac{M}{m}$. 利用均值不等式, $\text{LHS} \geq 2\sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}$.

3. $\forall \varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - f(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

由一致连续性知 $\exists H > 0$ s.t. $\forall x, x' \in [a-1, b+1], |x - x'| < H, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h < H$ 知 $\text{RHS} < \varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

4. $f(x)$ 单调, 并考虑 $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx &= f(a) \int_a^\xi \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2} (b - \xi)(\xi - a) \geq 0. \end{aligned}$$

5. 考虑 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$, 从而 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递增. 因此由定积分第二中值定理, $\exists \xi \in [e^2, b]$ 使得

$$\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} = \int_{e^2}^b \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}}{\ln b} \int_\xi^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{b}}{\ln b} (\sqrt{b} - \sqrt{\xi}) < \frac{2b}{\ln b}.$$

【编者注】上述做法纯扯淡. 构造 $g(b) = \frac{2b}{\ln b} - \int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x}$, 则 $g'(b) = \frac{2 \ln b - 2}{(\ln b)^2} - \frac{1}{\ln b} = \frac{\ln b - 2}{(\ln b)^2} > 0 \Rightarrow g(b) > g(e^2) = e^2$.

6. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)dt = \int_0^y f(t)dt + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.

7. 凸函数开区间上连续 \Rightarrow 闭区间上可积. 由 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux)du \Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i(ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i)$ 知 $F(x)$ 凸.

8. 由分部积分和定积分第一中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)d\frac{(x-a)^2}{2} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x)dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx. \end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx.$$

两式相加得 $\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \frac{(b-a)^3}{48} \stackrel{\text{Darboux}}{=} f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}$.

9. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$A_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2} + \frac{1}{2n} (f(0) - f(1)) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n} \right) + \frac{1}{2n} (f(0) - f(1)).$$

利用分部积分,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) = f(x) \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx := \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n} - B_n^k,$$

其中

$$\begin{aligned} B_n^k &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx \\ &= f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}. \end{aligned}$$

综上所述, 我们有

$$\begin{aligned} nA_n &= \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2}) - f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0) - f(1)}{2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n &= \frac{1}{8} \left(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx \right) + \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{f(0) - f(1)}{2}. \end{aligned}$$

10. 设弦方程为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点纵坐标为 y_1, y_2 , 则围成区域的面积 $S = \int_{y_1}^{y_2} \left(ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1 + y_2 = 2k, y_1y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

11. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi \left(R^2 h - \frac{1}{3} h^3 \right)$. 对应位移 $[h, h + dh]$ 所做的微功 $dW = gV(h)\rho dh$. 从而 $W = g \int_0^R V(h)dh = g \left(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4 \right) = \frac{13}{12} g \pi R^4$.

12. $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$.

13. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$, 则

面积 $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$.

14. (1) 注意到 $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i \geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^n f^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.

(2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.

(3) 在区间 $[0, \pi]$ 上成立 $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$, 因此 $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$, 从而 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$.

15. WLOG $\int_a^b p(x) dx = 1$, 并设 $\int_a^b f(x)p(x) dx = c$, 任取 $k \in [\varphi'_-(c), \varphi'_+(c)]$, 构造“切”直线 $l: y = k(x - c) + \varphi(c)$. 由凸函数性质知 $\varphi(x) \geq l(x)$ 恒成立. 从而 $\varphi(c) = l(c) = k \left(\int_a^b f(x)p(x) dx - c \right) + \varphi(c) = \int_a^b [k(f(x) - c) + \varphi(c)] p(x) dx = \int_a^b l(f(x)) p(x) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) p(x) dx$.

补充 (不要求掌握)

等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设 D 为凸区域 (D 中任意两点连线都在 D 内). 设 $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$, 此处选

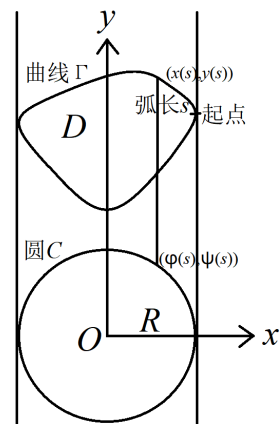
择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, 且 D 的面积为 $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s) ds$. 设

$C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面

积为 $\pi R^2 = - \int_0^L y dx = - \int_0^L \psi(s)x'(s) ds$. 从而 $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s)) ds \leq$

$\int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2} ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)} ds = RL$. 因此成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq$

$RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, 圆也!



4 广义积分

4.1 问题

1. 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$ 的收敛性与绝对收敛性.
2. 讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}} \ln(1 + \frac{1}{x})} dx$ 的收敛性.
3. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p} dx, p \geq 0, a \in \mathbb{R}$ 的收敛性.
4. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx$ 的收敛性.
5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q |\sin x|^r} dx, p, q, r > 0$ 的收敛性.
6. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ 的收敛性.
7. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 的收敛性和绝对收敛性.
8. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$.
9. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上内闭可积, $f(+\infty) = A, f(-\infty) = B$. 证明 $\forall a \in \mathbb{R}$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)] dx$ 收敛, 并求其值.
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ 收敛.
11. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\forall k = 1, 2, \dots, n, u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty} f(x) \prod_{k=1}^n u_k(x) dx$ 收敛.
12. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调, $g(x) \not\equiv 0$ 是 \mathbb{R} 上以 $T > 0$ 为周期的连续函数. 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)|g(x)| dx$ 收敛.
13. $f(x), g(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调递减的连续正函数, 并且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx, \int_0^{+\infty} g(x) dx$ 发散. 记 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 讨论 $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ 的收敛性.
14. 求积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
15. 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.
16. (Dirichlet 积分). 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. 你可以利用恒等式 $\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$.
17. (Euler 积分). 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.
18. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right\}$ 的极限, 求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (你可以使用如下命题: 当 $a \geq 1$ 时, $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$ 在区间 $[0, a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)

想一想: 这个做法似乎不太显然. 你有什么其他办法?

由中学课本, 一元正态分布有密度函数 $p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, 本题所求积分正是其归一化常数. 事实上, 我们用多元微积分的办法很容易知道这个结果, 如何从正态分布中抽取样本也和多元微积分紧密相关.

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}_{++}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \stackrel{\text{极坐标换元}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} dr (re^{-r^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

19. 利用余元公式 $\text{Beta}(p, 1-p) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} (0 < p < 1)$ 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$.
20. $a, b > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$.
21. 计算极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}(e^x - x - 1)} dx$.

4.2 解答

1. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, $\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos(\xi(x))}{6} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$, 其中 $\xi(x) \in \left[0, \frac{\sin x}{x}\right] \cup \left[\frac{\sin x}{x}, 0\right]$.

由于 $\left|\frac{\cos(\xi(x))}{6} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right| \leq \frac{1}{6x^3}$ 绝对收敛, 而 $\frac{\sin x}{x}$ 条件收敛, 因此原积分条件收敛.

2. 做变元替换 $t = \frac{1}{x}$ 知原积分为 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)}$. 由于变上限积分 $\int_1^T \sin t dt$ 有界, $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知收敛.

3. (1) 当 $a \neq 0, p > 0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N \cos ax dx$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛.

(2) 当 $a \neq 0, p = 0$ 时显然发散. (3) 当 $a = 0, p > 1$ 时显然收敛. (4) 当 $a = 0, 0 \leq p \leq 1$ 时显然发散.

4. 记 $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \stackrel{x=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^{2-p}} dx$. 先讨论 I_1 , 有

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \stackrel{t=x+\frac{1}{x}}{=} \int_2^{+\infty} \frac{2^{p-1} \sin t}{(t + \sqrt{t^2 - 4})^{p-1} \sqrt{t^2 - 4}} dt.$$

(a) $p > 0$ 时, 变上限积分 $\int_2^A \sin t dt$ 有界, $\frac{1}{(t + \sqrt{t^2 - 4})^{p-1} \sqrt{t^2 - 4}}$ 在 t 充分大后单调递减趋于 0, 因此收敛.

(b) $p = 0$ 时, 后者在 t 充分大后单调且不趋于 0 或 $+\infty$, 由 Abel 判别法知与 $\int_2^{+\infty} \sin t dt$ 收敛性相同, 因此发散.

(c) $p < 0$ 时, 显然发散.

对于 I_2 可直接将 $2-p$ 代入 p , 利用之前的讨论得到 $2-p > 0$ 时收敛, 否则发散.

由于原积分收敛当且仅当 I_1, I_2 同时收敛, 因此其在 $0 < p < 2$ 时收敛.

5. 显然当 $q \leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q > p+1$ 时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi + t)^p}{1 + (k\pi + t)^q |\sin t|^r} dt \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^p \pi^p \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (k\pi)^q \left|\frac{2}{\pi} t\right|^r} \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}.$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi + t)^p}{1 + (k\pi + t)^q |\sin t|^r} dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (k\pi)^p \int_0^\pi \frac{dt}{1 + [(k+1)\pi]^q |t|^r} \geq C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}} \int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}.$$

由于: (1) $r > 1$ 时 $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r}$ 一致有界; (2) $r = 1$ 时 $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim \ln A$; (3) $r < 1$ 时 $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim A^{1-r}$; 因此原积分收敛当且仅当 $q > (p+1) \max(r, 1)$.

6. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x}$, 则

$$\begin{aligned} u_k &\leq k\pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1 + (k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = k\pi \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} \\ &\leq 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 4(k-1)^6 \pi^4 x^2} = \frac{k}{\pi(k-1)^3} \int_0^{(k-1)^3 \pi^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{2k^2}. \end{aligned}$$

由于 $\int_0^{n\pi} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x} = \sum_{k=1}^n u_k \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$, 因此原广义积分收敛.

【编者注】这两题难度大了点, 主要目的是了解如何整体放缩 $\sin x$ 而不是只对其 $x \rightarrow 0$ 的部分做小量估计. 如果理解起来有困难, 至少先尝试读懂, 然后学会这个不等式: $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$.

7. 先考虑收敛性. 显然 $p \leq 0$ 时发散. $p > 0$ 时, 由于 $\left| \int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx \right| = 2 \left| \int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x} \sin x d \sin x \right| = 2|e^{\sin A}(\sin A - 1) - e^{\sin a}(\sin a - 1)| < 8e$, 且 $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p \geq 2$ 时发散, $0 < p < 2$ 时收敛. 再考虑绝对收敛性. $1 < p < 2$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \leq \frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. $0 < p \leq 1$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \geq \frac{2^p}{e} \left| \frac{\sin 2x}{(2x)^p} \right| \geq \frac{1}{e} \left| \frac{\sin^2 2x}{(2x)^p} \right| = \frac{1}{2e} \left(\frac{1 - \cos 4x}{(2x)^p} \right)$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{(2x)^p} dx$ 收敛, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x)^p} dx$ 发散, 因此原积分条件收敛.

8. 做变换 $t = \frac{1}{x}$, 则

$$\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 由定积分第二中值定理知 $\exists \xi_A \in [1, A]$ s.t. $|I_1| = \left| \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt \right| \leq \int_1^A |\cos t|^n dt$. 因此对于任意固定的 A , 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $I_1 \rightarrow 0$. 对于 I_2 , 成立 $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 选择 $A = \frac{2}{\varepsilon}$, 则 $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. 此时 $|I| \leq \varepsilon$, 由极限定义知结论成立.

【编者注】你也可以直接使用 Lebesgue 控制收敛定理.

Lebesgue 控制收敛定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $f_n \in L^1(\Omega)$ (这里是在说 Lebesgue 可积), 且 f_n 几乎处处收敛到某个函数 f . 如果存在可积函数 $g \in L^1(\Omega)$ 使得 $\sup_n |f_n| \leq g$ 对于 $\forall x \in \Omega$ 恒成立, 那么 f 也 Lebesgue 可积, 且 $\int f_n dx \rightarrow \int f dx$.

于是乎, 由于存在控制函数 $g(t) = \frac{1}{t^2} \geq \left| \frac{\cos^n t}{t^2} \right|$ 且其在 $[1, +\infty)$ 上绝对可积, 因此必然有 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt \rightarrow 0$.

9. 直接用定义. $\int_M^N [f(x+a) - f(x)] dx = \int_N^{N+a} f(x) dx - \int_M^{M+a} f(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty, M \rightarrow -\infty} (A - B)a$.

10. 做变量替换 $t = x - \frac{1}{x}$, 知 $\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} f\left(x - \frac{1}{x}\right) d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{\sqrt{t^2 + 4}} f(t) dt$.

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 收敛, $\frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{\sqrt{t^2 + 4}}$ 单调有界, 因此由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ 收敛. 另一侧同理.

11. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x) dx$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)u_2(x) dx$ 收敛, 依此类推.

12. “ \Rightarrow ”: 由无穷积分收敛, $f(x)$ 单调知可不妨设 $f(x) \geq 0$ 且单调递减, 那么由 $|g(x)|$ 的有界性立得结果.

“ \Leftarrow ”: 由无穷积分收敛, $f(x)$ 单调, $g(x)$ 连续且不恒为 0 知可不妨设 $f(x) \geq 0$ 且单调递减, 并存在区间 $[a, b] \subset [0, T]$ 使得 $\forall x \in [a, b], |g(x)| \geq m > 0$. 因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nT + b) \leq \frac{1}{m(b-a)} \sum_{n=1}^{+\infty} f(nT + b) \int_{nT+a}^{nT+b} |g(x)| dx \lesssim \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{nT+a}^{nT+b} f(x)|g(x)| dx \leq \int_0^{+\infty} f(x)|g(x)| dx < +\infty,$$

由 Cauchy 判别法立得结果.

13. 可收敛可发散. 可发散是显然的, 一个可收敛的例子是 $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, 然后交替构造 $f(x)$ 和 $g(x)$ 让

它们在许多区间为常数函数. 比如说, 他们在 $x = n$ 处分开后, 在接下来长度为 n^2 的区间里, 令 $f(x) \equiv \frac{1}{n^2}, g(x) = \frac{1}{x^2}$; 然后在长度为 1 的区间里, $f(x)$ 连续地连接两点 $\left(n^2 + n, \frac{1}{n^2}\right)$ 和 $\left(n^2 + n + 1, \frac{1}{(n^2 + n + 1)^2}\right)$, $g(x) \equiv \frac{1}{x^2}$; 再在接下来长度为 $(n^2 + n + 1)^2$ 的区间里, 令 $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) \equiv \frac{1}{(n^2 + n + 1)^2}$.

14. 做倒数变换, 知 $I(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{d\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})} = I(-\alpha)$. 又有 $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$.

$$15. I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \stackrel{x=2x}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4} d(2x) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{\ln 2}{6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \stackrel{x=e^t}{=} \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1} dt - \frac{\pi \ln 2}{12} = -\frac{\pi \ln 2}{12}.$$

16. 对恒等式两边积分知 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 记 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 由于 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = O(x)$, 故 $f(x) \in R[0, \pi]$.

由 R-L 引理知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x dx = 0$, 即是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

再利用恒等式 $\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 立得结论.

17. 由对称性知 $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx$. 做变换 $x = 2x$ 知

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

18. 记 $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. 做变元替换 $t = \sqrt{n} \sin x$ 知 $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由

于 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$, 因此只需求出极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right] dt$. 在提示中令 $x = t^2, a = n$,

得到估计式 $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right] dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$19. I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \stackrel{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta} \left(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta} \pi}.$$

20. 令 $t = ax - \frac{b}{x}$, 则 $x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a}, ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}, dx = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a\sqrt{t^2 + 4ab}} dt$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt. \end{aligned}$$

21. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开和变元替换 $x = x\sqrt{t}$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}(e^x - x - 1)} dx &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t} \frac{e^{\xi(x)} x^2}{2}} dx \quad (0 \leq \xi(x) \leq x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^M e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx + \int_M^{+\infty} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx := I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

对于 I_1 , 由于 $\lim_{t \rightarrow 0+0} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 且有一致性 $\lim_{t \rightarrow 0+0} \sup_{x \in [0, M]} \left| e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = 0$, 因此 $\lim_{t \rightarrow 0+0} I_1(t) = \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

对于 I_2 , 我们有 $|I_2(t)| \leq \int_M^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 恒成立. 因此我们取充分大的 M , 此时有

$$\left| I_1(t) + I_2(t) - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq \left| I_1(t) - \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| + |I_2(t)| + \left| \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

对充分小的 t 成立. 因此原极限值为 $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5 正项级数与任意项级数

5.1 问题

1. 讨论级数 $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ 的收敛性.
2. 讨论级数 $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$ 的收敛性.
3. $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$, $a_n = \sin a_{n-1}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ 的收敛性.
4. $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ 的收敛性.
5. $0 < p < 1$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^p}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛性.
6. (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明:
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散} \end{cases}$$
7. 计算级数 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1}$.
8. $f(x) \in D[1, +\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx$ 收敛, 证明广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.
9. 如果对任意以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛性呢?
10. 是否存在部分和序列有界且通项趋于 0 的发散级数?
11. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.
12. 讨论下列级数的收敛性: (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$; (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n}$.
13. $p, q > 0$, 讨论级数 $1 - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \dots$ 的收敛性与绝对收敛性.
14. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ 收敛, 证明: (1) $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+k} = 0$.
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 数列 $p_n > 0$ 且单调递增趋于 $+\infty$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{p_n} = 0$.
16. 计算级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$.
17. 给出级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的一个显式重排使其收敛到 $\ln 6$.

5.2 解答

1. 当 $e^k \leq n \leq e^{k+1}$ 时, $\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{1}{(k+1)^{\ln(k+1)}}$, 从而 $\sum_{n \in [e^k, e^{k+1}]} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{e^{k+1} - e^k - 2}{(k+1)^{\ln(k+1)}} \rightarrow +\infty$, 因此发散.
2. 注意到 $\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{8}$, $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{16}$, 依此类推, 再利用 $\sin x \sim x$ 知原级数收敛.
3. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n^2 \stackrel{\text{stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}} = 3$, 因此 $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, $a_n^p \sim \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$, 而当 $p \leq 2$ 时级数发散, $p > 2$ 时级数收敛.

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$. 因此可按从小到大顺序将 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 重排为 $a_{\phi(1)} \leq a_{\phi(2)} \leq \dots \leq a_{\phi(n)} \leq \dots$.

令 $b_n = \frac{n}{a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \dots + a_{\phi(n)}}$, 则 $\{b_n\}$ 单调递减, 且 $b_{2n} = \frac{2n}{a_{\phi(1)} + \dots + a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{a_{\phi(n)} + \dots + a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{na_{\phi(n)}} = \frac{2}{a_{\phi(n)}}$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. 又因为 $\frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq b_n$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$ 收敛.

5. 法 1: 注意到 a_n 单调递减, 且 $a_{n+1} - a_n = -a_{n+1}a_n^p \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^p} < \frac{a_n - a_{n+1}}{\xi_n^p}$ 微分中值定理 $\frac{1}{1-p}(a_n^{1-p} - a_{n+1}^{1-p})$. 然后两边累加得到收敛性.

法 2: 注意到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n \stackrel{\text{stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1-p} = 0$, 然后有

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-p} a_n \stackrel{\text{stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{2-p} - n^{2-p}}{a_n^{p-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2-p) \int_n^{n+1} (xa_n)^{1-p} dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2-p)((n+1)a_n)^{1-p} = 0,$$

知 $a_n \lesssim \frac{1}{n^{2-p}}$, 故原级数收敛.

6. 先证明第一种情况. 由条件知 $\exists r > 1$ 使得当 n 足够大时, $\ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > r \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r}$ 成立. 又可以验证当 $1 < p < r$ 且 n 足够大时, 成立

$$\frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1) - \ln^p n]}{\ln^{p-1} n} < r.$$

这可以利用 $f(x) = x^p$ 的微分中值定理: $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\text{LHS} = \frac{(n+1)p \ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln^{p-1} n} < p \underbrace{(n+1)[\ln(n+1) - \ln n]}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1} n}}_{\rightarrow 1} \rightarrow p < r = \text{RHS}.$$

因此当 n 足够大时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Rightarrow a_n < \frac{C}{n \ln^p n}$. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln^p n}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 第二种情况是完全类似的, 只需把所有不等式反号.

7. 注意到 $\arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} = \arctan \frac{1}{2k-2} - \arctan \frac{1}{2k}$, 从而 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} = \arctan \frac{1}{2}$.

8. 注意到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int_m^n f(x) dx \right| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f(k) - f(x)| dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^x |f'(t)| dt dx \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)| dx dt \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f'(t)| dt = \int_m^n |f'(t)| dt, \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.

9. 不妨设 $a_n > 0$, 否则可将对应 x_n 反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则可归纳构造数列 A_n ,

满足 $A_0 = 0, A_n = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \sum_{i=A_{n-1}+1}^k a_i \geq n$. 从而定义数列 $\{x_n\}$ 为 $A_1 - A_0$ 个 1, $A_2 - A_1$ 个 $\frac{1}{2}, \dots, A_n - A_{n-1}$ 个 $\frac{1}{n}, \dots$

的依次排列, 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n > 1 + 1 + \dots = +\infty$. 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛.

10. 存在. 一个例子为 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$

11. $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0, $\sum_{n=2}^k \sin n$ 对于 $\forall k \geq 1$ 有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛. 又因为 $\left| \frac{\sin n}{\ln n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{\ln n} =$

$\frac{1 - \cos 2n}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos 2n}{\ln n}$, 而 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \ln n}$ 发散, 因此级数不绝对收敛.

12. (1) 注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n+n\pi)}{n}$. 部分和序列 $\sum_{n=1}^k \sin(n+n\pi)$ 有界, $\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知收敛.

(2) 合并同号项, 则级数改写为 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$, 其中 $b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \leq \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$. 另一方面,

$$b_k \geq \int_0^1 \frac{1}{k^2+x} dx + \int_1^2 \frac{1}{k^2+x} dx + \cdots + \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{k^2+x} dx = \int_0^{2k+1} \frac{1}{k^2+x} dx = \ln \frac{(k+1)^2}{k^2},$$

$$b_{k+1} \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{(k+1)^2+x} dx + \cdots + \int_{2k+1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2+x^2} dx = \int_{-1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2+x^2} dx = \ln \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{k(k+2)},$$

这意味着 $b_k - b_{k+1} \geq \ln \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)} \geq 0$. 因此由 Leibniz 判别法知收敛.

(3) 首先由 Dirichlet 判别法易知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 注意到 $\frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} - \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)}$, 且成立估计

$$\frac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} \leq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)} \leq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)} = \frac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)}$ 均发散, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)}$ 均收敛 (Abel 判别法), 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)}$ 发散, 从而原级数可写成一个收敛级数和一个发散级数的和, 故发散.

13. (a) 当 $p > 1, q > 1$ 时, $|a_n| \leq \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$, 因此绝对收敛.

(b) 当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛.

(c) 当 $p > 1, 0 < q \leq 1$ 或 $0 < p \leq 1, q > 1$ 时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散.

(d) 当 $0 < p < q \leq 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}}{\frac{1}{(2n-1)^p}} = 1$ 知级数发散.

(e) 当 $0 < q < p \leq 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(2n)^q} + \frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}} = 1$ 知级数发散.

14. (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+k)a_{n+k}$ 收敛, $\frac{n}{n+k}$ 随 n 单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记 $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} ka_k$. 则

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m na_{n+k} \right| &= \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (n+k)a_{n+k} \right| = \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (R_{n+k-1} - R_{n+k}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k+1} R_k - \frac{m}{k+m} R_{k+m} + \sum_{n=1}^{m-1} R_{n+k} \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{k+1 \leq j \leq n+m-1} |R_j| \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \left(\frac{m}{k+m} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 得到 $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} \right| \leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \leq 2 \sup_{j \geq k} |R_j| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

15. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ 且 $|S_n| \leq M$ 恒成立. 则

$$\sum_{k=1}^n p_k a_k = p_1 S_1 + \sum_{k=2}^n p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (p_k - p_{k+1}) + S_n p_n.$$

这意味着

$$\frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} = (S_n - S) - \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + S \frac{p_1}{p_n}.$$

当 n 充分大时, $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{6}$, $\left|S \frac{p_1}{p_n}\right| < \frac{\varepsilon}{6}$. 对于第二项, 由极限定义, $\exists N_1 > 1$, s.t. $\forall n \geq N_1, |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \right| \leq 2M \sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \leq 2M \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由极限定义, $\exists N_2 > N_1$, s.t. $\forall n \geq N_2, \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} < \frac{\varepsilon}{12M}$. 此时 $\left| \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \right| < \frac{2\varepsilon}{3}$, 从而有 $\left| \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} \right| < \varepsilon$.

这表明其极限值为 0.

$$16. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \sqrt{5}k}{k} = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kt dt = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t dt + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5}) \xrightarrow{R-L} \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5}).$$

17. 我们证明一个更广泛的结论: 先排 p 项正的, 再排 q 项负的, 级数会收敛到 $\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

记 A_n 是新级数前 n 项的部分和, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + c + \alpha(n)$, 其中 c 是欧拉常数, $\alpha(n)$ 是 $n \rightarrow +\infty$ 的无穷小量. 则

$$A_{n(p+q)} = S_{2np} - \frac{1}{2}S_{np} - \frac{1}{2}S_{nq} = \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + o(1), \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n(p+q)} = \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right). \text{ 另一方面, 对 } \forall l \in \{1, 2, \dots, p+q\},$$

$$|A_{n(p+q)+l} - A_{n(p+q)}| \leq \max \left\{ \sum_{k=np}^{(n+1)p-1} \frac{1}{2k+1}, \sum_{k=nq}^{(n+1)q-1} \frac{1}{2k+2} \right\} \leq \max \left\{ \frac{p}{2np+1}, \frac{q}{2nq+2} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n(p+q)} = \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right).$$

6 数项级数的运算与无穷乘积

6.1 问题

1. 记 $a_n = \prod_{k=1}^n \frac{k - \arctan k}{k}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛性.

2. 已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $a_n - a_{n+1} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 的收敛性.

3. 已知 $a_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. (1) 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan a_n$ 也绝对收敛; (2) 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 只是条件收敛, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan a_n$ 的收敛性.

4. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2}{n}$ 条件收敛.

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ 且绝对收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ 且条件收敛, 证明它们的 Cauchy 乘积收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB$.

6. 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

7. (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

8. 不得利用 $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, 证明 $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1$.

9. 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}$.

10. (Euler 公式). 证明 $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. 你可以将 $\sin[(2n+1)\phi]$ 写成关于 $\sin \phi$ 的多项式, 并利用零点求解.

11. 计算无穷乘积 $2 \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \dots$. 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.

6.2 解答

1. $a_n = \exp \left[\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k - \arctan k}{k} \right) \right] \lesssim \exp \left[\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k - 1.2}{k} \right) \right] \asymp \exp \left(\sum_{k=1}^n -\frac{1.2}{k} \right) \asymp \exp(-1.2 \ln n) = n^{-1.2}$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

2. 原题条件等价于 $\frac{1}{n} - a_n \geq \frac{1}{n+1} - a_{n+1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - a_n = 0$, 因此由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - a_n \right)$ 收敛, 这等价于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n+1} a_n + (-1)^n \frac{1}{n} \right)$ 收敛. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 也收敛.

3. (1) 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 因此不妨设 $|a_n| < 1$. 此时 $|\tan a_n| < |a_n| \tan 1$, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan a_n$ 绝对收敛.

(2) 不一定. 一个反例是 $\begin{cases} a_{3k} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \\ a_{3k+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \\ a_{3k+2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \end{cases}, k \in \mathbb{N}$. 显然 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^5$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ 发散, 利用 $\tan x$

的泰勒展开 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$ 知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan a_n$ 发散.

【编者注】本题做法由作者本人使用 Gemini3-Thinking 给出. BTW, DeepSeek3.2-Thinking 给出错误答案.

4. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n \sin k^2, b_n = \frac{1}{n}$. 根据 Abel 变换, 原级数前 N 项和可写为

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin n^2}{n} = \frac{S_N}{N} - \sum_{n=1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)}.$$

我们的目标是给出 S_n 的估计. 定义 $E_n = \sum_{k=1}^n e^{in^2} = \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \alpha n^2}$ (其中 $\alpha = \frac{1}{2\pi}$), 则 $S_n = \text{Im}(E_n)$, 从而 $|S_n| \leq |E_n|$.

Weyl 不等式

对于二次多项式的指数和, 如果存在互质的正整数 a, q 满足 $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, 则存在一个绝对常数 C , 使得

$$|E_n| \leq C \left(\frac{n}{\sqrt{q}} + \sqrt{n \log q} + \sqrt{q \log q} \right).$$

Dirichlet 逼近定理

对任意实数 α 和正整数 n , 必然存在互质的正整数 a, q 满足 $1 \leq q \leq n$, 成立 $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qn}$.

由于 π 不是 Liouville 数, 因此存在绝对常数 $c > 0, \mu > 2$, 使得对于所有正整数 a, q 满足 $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\mu}$. 结合 Dirichlet 逼近定理和有限无理数测度的性质, 我们有 $\frac{c}{q^\mu} \leq \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qn}$, 因此可解出 $q \gtrsim n^{\frac{1}{\mu-1}}$.

注意到由 $q \leq n$ 自然有 $\frac{1}{qn} \leq \frac{1}{q^2}$, 因此把刚刚的估计代入 Weyl 不等式, 得到 $|E_n| \lesssim n^{1-\frac{1}{2(\mu-1)}} + \sqrt{n \log n}$. 这也意味着

$|S_n| \lesssim n^{1-\delta}$, 从而有 $\sum_{n=1}^N \frac{\sin n^2}{n} \lesssim N^{-\delta} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+\delta}}$, 然后令 $N \rightarrow +\infty$ 知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2}{n}$ 收敛.

绝对收敛性可利用 $\left| \frac{\sin n^2}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 n^2}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n^2)}{2n}$, 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n^2)}{2n}$ 收敛, 故知其不绝对收敛.

【编者注】本题解法由北京大学信息科学技术学院 25 级本科生 xza 同学使用 Gemini3.1pro 给出.

5. 记 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 则 $\sum_{k=1}^n c_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1 = A_n B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_1)$ (定义 $\beta_k = B_k - B$): $= \Delta_1(n) + \Delta_2(n)$. 显然 $\Delta_1(n) \rightarrow AB$, 下证 $\Delta_2(n) \rightarrow 0$. 设 $|\beta_n| \leq \beta, \forall n \geq 1$. 由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 3$, s.t. $\forall n > N, \forall p \geq 1, |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \right)}$, $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$. 从而当 $n \geq 2N$ 时, $|\Delta_2(n)| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k \beta_{n+1-k} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k \beta_{n+1-k} \right| \leq \varepsilon$.

6. 不一定, 反例是 $a_0 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 和 $b_0 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ 均发散, 但 Cauchy 乘积 $c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \dots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^1 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛.

7. (1) 不一定, 反例是 $a_n \equiv 0$ 和 $b_n \equiv 1$. 当然也不一定收敛, 如 $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$.

(2) 一定. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \geq a_1 b_{n-1}$, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 发散.

8. 注意到其 Cauchy 乘积满足 $c_0 = 1, c_n \equiv 0, \forall n \geq 1$, 且题中所有出现的级数均绝对收敛.

9. $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{+\infty} (1+x^{2^i(2n-1)}) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-x^{2n-1})^{-1}$.

10. 注意到 $\sin[(2n+1)\phi]$ 可展开为 $\sin \phi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此 $\sin[(2n+1)\phi] = \sin \phi P(\sin^2 \phi)$, 其中 $P(\cdot)$ 是 n 次多项式. 由极限关系知 $P(0) = 2n+1$, 且 LHS 全部零点为 $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}, k=1, \dots, n$, 因此

$$\begin{aligned} P(t) &= (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ \Rightarrow \sin[(2n+1)\phi] &= (2n+1) \sin \phi \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ \Rightarrow \sin x &= (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \end{aligned}$$

现在, 问题变为求 RHS 在 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限. 记

$$U_m = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right), V_m = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_m &= x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right), \\ 1 > V_m &\geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2n+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2} \frac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2}}\right) = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

因此由夹逼原理, $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$.

11. 主要难点在于如何写成通式.

$$\begin{aligned} P_n &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})!!(2^k-1)!!} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^k}} (2^n-1)!! = \frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}}(2^{n-1})!} 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!} \cdot \frac{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!} \right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} \\ &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}} \frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!} \right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} = 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[2^{1-\frac{1}{2^k}} \frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2^{k-2}}}} \right] = 2\sqrt{2} \cdot 2^{n-1-\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}} \frac{1}{2} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= 2 \cdot 2^{n+\frac{1}{2^n}} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2 \left\{ 2^{n2^n+1} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^n}} \underset{\text{Stirling}}{\sim} 2 \left[2^{n2^n+1} \frac{2\pi 2^{n-1} \left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n \left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}} \right]^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow e. \end{aligned}$$

7 函数项级数的一致收敛

7.1 问题

1. 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ 的收敛域.
 2. 设 $f_n(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数序列, 并且满足 $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow +\infty)$, 序列 $\{x_n\} \subset [0, 1]$ 满足 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow +\infty)$. (1) 试说明当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $f_n(x_n)$ 未必收敛到 $f(x_0)$; (2) 设 $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in [0, 1]$, 证明必有 $f_n(x_n)$ 收敛到 $f(x_0)$.
 3. 求下列函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数, 并讨论在给定的区间上是否一致收敛: (1) $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n, x \in [0, 1]$; (2) $\sin \frac{x}{n^n}$, (a) $x \in [a, b]$, (b) $x \in \mathbb{R}$; (3) $\frac{\sin(n^n x)}{n^\alpha}, \alpha > 0, x \in \mathbb{R}$.
 4. 讨论下列函数序列或函数项级数在指定区间上的一致收敛性: (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}, x \in \mathbb{R}$; (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}, x \in \mathbb{R}$; (3) $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n, \alpha \in \mathbb{R}, x \in [0, 1]$; (4) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, x \in [0, +\infty)$; (5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} \sin nx, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
 5. 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 \mathbb{R} 上的绝对收敛性、一致收敛性和绝对一致收敛性.
 6. $f(x) \in D \left[0, \frac{1}{2}\right], f(0) = 0, f'(x) \geq 0$, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(x^n)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛性.
 7. 函数列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且对于 $\forall n, f_n, g_n$ 在 I 上有界. 讨论函数列 $\{f_n g_n\}$ 在 I 上的一致收敛性.
 8. $f(x) \in C^1(a, b)$, 定义 $F_n(x) = \frac{n}{2} \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x - \frac{1}{n}\right) \right]$, 证明函数列 $\{F_n\}$ 在 (a, b) 上内闭一致收敛.
 9. $f_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上可积一致收敛到 $f(x)$, 且存在 \mathbb{R} 上的可积函数 $F(x)$ 满足 $|f_n(x)| \leq F(x)$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.
- 【编者注】本题“收敛的一致性”条件可去.
10. a_n 单调递减趋于 0, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7.2 解答

1. 原级数是 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right)^n$, 而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 因此当 $x > -1$ 时收敛, 当 $x < -1$ 时发散. 而当 $x = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{1}{2}}$, 因此原函数项级数发散.
2. (1) 如 $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, 取 $x_n = \frac{1}{n}$.
(2) $f_n(x) \Rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) \in C[0, 1]$. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由(一致)收敛性知当 n 充分大时有 $|x_n - x_0| < \delta$ 且 $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, 因此有原收敛关系.
3. (1) 极限函数为 0, 因为 $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{n}{3}$, 因此不一致收敛.
(2) 极限函数为 0. (a) 因为 $\sup_{x \in [a, b]} \left| \sin \frac{x}{n^n} \right| \leq \frac{|a| + |b|}{n^n}$, 由 M-判别法知一致收敛; (b) 因为 $f(n^n) = \sin 1$, 因此不一致收敛.
(3) 极限函数为 0, 因为 $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(n^n x)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$, 由 M-判别法知一致收敛.
4. (1) $\sum_{n=1}^N \sin x \sin nx = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x \right]$ 一致有界, 且 $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

(2) $\sum_{n=1}^N (-1)^n$ 一致有界, $\frac{1}{n+x^2}$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

(3) $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n+1}) \sim Cn^{\alpha-1}$, 因此 $\alpha < 1$ 时一致收敛, $\alpha \geq 1$ 时不一致收敛.

(4) 显然 $f_n(x) \rightarrow \max(1, x)$. 在 $[0, 1]$ 上, $|f_n(x) - 1| \leq \sqrt[3]{2} - 1$; 在 $[1, +\infty)$ 上, $|f_n(x) - x| \leq \sqrt[3]{2} - 1$ (因为 $(f_n(x) - x)' < 0$). 因此由最值判别法知一致收敛.

(5) 记 $f_n(x) = \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}$. 则 $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \Leftrightarrow (1-x)(1+x^{2n+1}) \geq 0$ 恒成立, 且 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0$, 而 $\sum_{n=1}^N \sin nx$ 关于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 一致有界, 因此由 Dirichlet 判别法, 知原级数一致收敛.

5. 绝对(一致)收敛性: $\left| \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} \right| \begin{cases} = 0, & x=0 \\ \leq \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x \neq 0 \end{cases}$ 知绝对收敛, $\left[\sum_{k=n}^{2n} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k} \right| \right]_{x^2=\frac{1}{n}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1} - 1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} >$

$\frac{e-1}{e^2}$ 知不绝对一致收敛. 一致收敛性: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ 有界, $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

6. $\sum_{n=1}^N (-1)^n$ 一致有界, $f(x^n)$ 随 n 单调递减且一致趋于 0, 有 Dirichlet 判别法知一致收敛.

7. 先证一致有界性. 由一致收敛性,

$$\exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ s.t. } \forall m, n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1.$$

从而对 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x \in I$, 有

$$|f_n(x)| \leq \sup_{x \in I, 1 \leq k \leq N} |f_k(x)| + 1 := M_f,$$

因此一致有界. 同理对 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x \in I$, 有 $|g_n(x)| \leq M_g$.

8. 由导数定义, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} + \frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \right] = f'(x)$. 另一方面, 考虑闭区间 $[c, d]$,

则我们有 $|F_n(x) - f'(x)| = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} + \frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} - 2f'(x) \right] = \frac{1}{2} [(f'(\xi_1) - f'(x)) + (f'(\xi_2) - f'(x))] \leq$

$\sup_{|x-y| < \frac{1}{n}} |f'(x) - f'(y)| \rightarrow 0$, 其中最后一步利用了 $f'(x)$ 在区间 $[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}]$ 上的一致连续性. 然后用 M-判别法.

9. 由题给条件, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \exists N' > 0, \text{ s.t. } \forall n > N'$,

$$\begin{aligned} \left| \int_N^{+\infty} f_n(x) dx \right| &\leq \int_N^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \int_N^{+\infty} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{8}, \\ \left| \int_{-\infty}^{-N} f_n(x) dx \right| &< \int_{-\infty}^{-N} |f_n(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{-N} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{8}, \end{aligned}$$

且

$$\left| \int_{-N}^N f_n(x) dx - \int_{-N}^N f(x) dx \right| \leq \int_{-N}^N |f_n(x) - f(x)| dx < 2N \cdot \frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 我们有估计

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_N^{+\infty} f_n(x) dx \right| + \left| \int_N^{+\infty} f(x) dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{-N} f_n(x) dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{-N} f(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{-N}^N f_n(x) dx - \int_{-N}^N f(x) dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{8} \cdot 4 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

对 $\forall n > N'$ 成立. 从而有原极限.

10. 记 $S_{n,p}(x) = \sum_{k=1}^p a_k \sin kx$. 先证必要性. $o(1) = S_{n,2n}(\frac{\pi}{4n}) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \sin \frac{k\pi}{4n} \geq \frac{n}{2} (a_{2n-1} + a_{2n}) \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow a_n = o(\frac{1}{n})$.

再证充分性. 定义单调递减数列 $b_n = \sup_{m \geq n} \{ma_m\} = o(1)$.

(a) 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{p}$ 时, $|S_{n,p}(x)| \leq \sum_{k=n}^p ka_k x \leq pb_n x \leq b_n \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) 当 $x \geq \frac{\pi}{n}$ 时, 由于 $\forall m > n$, $\left| \sum_{k=n}^m \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{\pi}{x} \leq n$, 利用 Abel 变换可知 $|S_{n,p}(x)| \leq na_n \leq b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(c) 当 $\frac{\pi}{p} < x < \frac{\pi}{n}$ 时, 取 $q = \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor$, 则 $|S_{n,p}(x)| \leq |S_{n,q}(x)| + |S_{q+1,p}(x)| \leq b_n \pi + b_{q+1} \leq (\pi + 1)b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
从而由 Cauchy 准则知一致收敛.

8 函数项级数极限函数的分析性质

9 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2026 春数学分析 II 习题课 2 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.